

### Тензорная, симметрическая и грассманова алгебры

**АЛ11♦1.** Пусть  $v \in V$  и  $\omega \in \Lambda^k V$ . При каких  $k$  равенство  $v \wedge \omega = 0$  равносильно существованию такого  $\eta \in \Lambda^{k-1} V$ , что  $\omega = v \wedge \eta$ ?

**АЛ11♦2.** Верно ли, что **а)**  $S^n(V_1 \oplus \dots \oplus V_k) \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_k} S^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes S^{m_k} V_k$

**б)**  $\Lambda^n(V_1 \oplus \dots \oplus V_k) \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_k} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_k} V_k$

(суммирование идёт по всем  $m_1, \dots, m_k$  с  $m_1 + \dots + m_k = n$  и  $0 \leq m_i \leq n$ )?

**АЛ11♦3\*.** Пусть набор векторов  $w = (w_1, \dots, w_n)$  произволен, а  $u = (u_1, \dots, u_n)$  линейно независим. Докажите, что  $u_1 \wedge w_1 + \dots + u_n \wedge w_n = 0$  если и только если  $w = u A$  для симметричной матрицы  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ .

**АЛ11♦4.** Для линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  выразите через коэффициенты характеристического многочлена  $\chi_F(t)$  числа: **а)**  $\text{tr } F^{\otimes 2}$  **б\*)**  $\text{tr } F^{\otimes 3}$  **в)**  $\det F^{\otimes 2}$  **г\*)**  $\det F^{\otimes 3}$ .

**АЛ11♦5.** Пусть линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  диагоналізуем. Положим

$$S^k F : S^k V \rightarrow S^k V, \quad v_1 \dots v_k \mapsto F(v_1) \dots F(v_k),$$

$$\Lambda^k F : \Lambda^k V \rightarrow \Lambda^k V, \quad v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto F(v_1) \wedge \dots \wedge F(v_k).$$

Выразите собственные числа этих операторов через собственные числа  $F$  и докажите в  $\mathbb{k}[[t]]$  равенства: **а)**  $\det(E - tF)^{-1} = \sum_{k \geq 0} \text{tr}(S^k F) t^k$  **б)**  $\det(E + tF) = \sum_{k \geq 0} \text{tr}(\Lambda^k F) t^k$ .

**АЛ11♦6\*.** Верны ли равенства из **зад. АЛ11♦5** также и для недиагоналізуемых  $F$ ?

**АЛ11♦7.** Пусть  $\text{char } \mathbb{k} = 0$  и  $\text{tr } \Lambda^k F = 0$  при всех  $k \geq 1$ . Верно ли, что  $F$  нильпотентен?

**АЛ11♦8.** Пусть  $\dim V = d \geq 2$ . Какие значения может принимать  $\text{rk } \Lambda^{d-1} F$ ?

**АЛ11♦9.** Фиксируем ненулевой вектор  $u \in V$ . Оператор  $\iota_u : V^{*\otimes n} \rightarrow V^{*\otimes n-1}$ , двойственный<sup>1</sup> оператору  $\lambda_u : V^{\otimes(n-1)} \rightarrow V^{\otimes n}$ ,  $w \mapsto u \otimes w$ , левого тензорного умножения на  $u$ , называется *внутренним умножением на  $u$* . Явно опишите его действие на заданную  $n$ -линейную форму  $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ , рассматриваемую как тензор  $\varphi \in V^{*\otimes n}$ . Бывает ли  $\iota_u$  не эпиморфен?

**АЛ11♦10.** Пусть  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ , так что  $(S^n V)^* \simeq S^n(V^*)$  и  $(\Lambda^n V)^* \simeq \Lambda^n(V^*)$ . Фиксируем ненулевой вектор  $u \in V$ . Есть ли связь между оператором  $\partial_u$  дифференцирования многочленов в направлении вектора<sup>2</sup>  $u$  и операторами **а)**  $S^n V^* \rightarrow S^{n-1} V^*$  **б)**  $\Lambda^n V^* \rightarrow \Lambda^{n-1} V^*$ , двойственными к операторам  $S^{n-1} V \rightarrow S^n V$  и  $\Lambda^{n-1} V \rightarrow \Lambda^n V$  левого умножения на  $u$ ?

**АЛ11♦11 (комплексы Де Рама и Кошуля).** Фиксируем в  $V^*$  базис  $x_1, \dots, x_n$  и положим

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \sum x_i \otimes \partial / \partial x_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \rightarrow \Lambda^{k+1} V^* \otimes S^{m-1} V^*, \quad \omega \otimes f \mapsto \sum_i x_i \wedge \omega \otimes \partial f / \partial x_i,$$

$$\partial \stackrel{\text{def}}{=} \sum \partial / \partial x_i \otimes x_i : \Lambda^k V^* \otimes S^m V^* \rightarrow \Lambda^{k-1} V^* \otimes S^{m+1} V^*, \quad \omega \otimes f \mapsto \sum_i \partial \omega / \partial x_i \otimes x_i f.$$

Покажите, что эти операторы **а\*)** не зависят от выбора базиса **б)** удовлетворяют равенствам  $d^2 = 0$ ,  $\partial^2 = 0$ ,  $d\partial + \partial d = (k+m)\text{Id}_{\Lambda^k V^* \otimes S^m V^*}$ . **в\*)** Вычислите  $\ker d / \text{im } d$  и  $\ker \partial / \text{im } \partial$ .

**АЛ11♦12.** Пусть  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ . Докажите для любого  $f \in S^n V^*$  и всех  $u, w \in V$  равенства

**а)**  $f(u+w) = \sum_k \partial_w^k f(u) / k!$  **б)**  $(n-k)! \partial_u^k f(w) = n! \tilde{f}(u^k, w^{n-k}) = k! \partial_w^{n-k} f(u)$

**в)**  $\tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} f / n!$ , где  $\tilde{f} : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$  — полная поляризация многочлена  $f$ .

**АЛ11♦13\*.** Докажите, что  $\det(\alpha A + \beta B) = \sum_{p=0}^n \text{tr}(\Lambda^p A \cdot \Lambda^p B^\vee) \alpha^p \beta^{n-p}$  для всех чисел  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  и матриц  $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ , где  $\Lambda^p A$  и  $\Lambda^p B^\vee$  — квадратные матрицы размера  $\binom{n}{p}$ , клетки которых занумерованы возрастающими  $p$ -элементными подмножествами  $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ , и в  $IJ$ -той клетке у  $\Lambda^p A$  находится  $IJ$ -тый  $p \times p$  минор  $a_{IJ}$  матрицы  $A$ , а у  $\Lambda^p B^\vee$  — алгебраическое дополнение  $(-1)^{|I|+|J|} b_{IJ}$  к  $IJ$ -му  $p \times p$  минору матрицы  $B$ .

<sup>1</sup>При каноническом отождествлении  $V^{*\otimes n}$  с  $V^{\otimes n}$  посредством полной свёртки.

<sup>2</sup>Напомню, что если  $e_1, \dots, e_d \in V$  и  $x_1, \dots, x_n \in V^*$  — двойственные базисы, а  $u = a_1 e_1 + \dots + a_d e_d$ , где  $a_i \in \mathbb{k}$ , то  $\partial_u f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d a_i \partial f / \partial x_i$ .

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4а			
б			
в			
г			
5а			
б			
6			
7			
8			
9			
10а			
б			
11а			
б			
в			
12а			
б			
в			
13			