

## Целые числа и вычеты

- АС1♦1.** Вычислите  $\text{НОД}(a, b)$  и подберите такие целые  $x, y, \alpha, \beta$ , что  $\text{НОД}(a, b) = ax + by$  и  $\text{НОК}(a, b) = \alpha a = \beta b$  для чисел а)  $a = 221, b = -323$  б)  $a = 8\,888\,888, b = 8\,888$   
в)  $a = -44\,863, b = 70\,499$  г)  $a = 8\,385\,403, b = 2\,442\,778$
- АС1♦2.** Для всех  $\ell, m, n \in \mathbb{N}, \ell \geq 2$ , вычислите  $\text{НОД}(\ell^n - 1, \ell^m - 1)$ .
- АС1♦3.** Вычислите а)  $\text{НОД}(665, 684, 741)$  б)  $\text{НОД}(924, 1540, 3003, 5005)$  и представьте его в виде целочисленной линейной комбинации данных чисел.
- АС1♦4.** Найдите все целые решения  $(x, y)$  уравнений: а)  $1537x + 1387y = 1$  б)  $5x + 7y = 11$   
в)  $26x + 32y = 60$  г)  $169x + 221y = 26$  д)  $nx + (2n - 1)y = 3$ .
- АС1♦5.** Найдите все натуральные решения уравнений:  
а)  $173x + 95y = 20000$  б)  $57x + 102y = 10000$ .
- АС1♦6.** Составьте таблицы умножения в кольцах  $\mathbb{Z}/(m)$  для  $4 \leq m \leq 9$ . В каждом из этих колец перечислите все квадраты, все делители нуля, все нильпотенты, все обратимые элементы, и для каждого обратимого элемента укажите обратный.
- АС1♦7.** Для данных  $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2$ , опишите все такие  $[x] \in \mathbb{Z}/(m)$ , что  $[x][n] = [0]$  в  $\mathbb{Z}/(m)$ . Сколько всего таких классов?
- АС1♦8.** Найдите последнюю цифру и остаток от деления на 7 у чисел  
а)  $2021^{2022}$  б)  $2022^{2023}$  в)  $2021^{2022^{2023}}$ .
- АС1♦9.** Верно ли, что а)  $2222^{5555} + 5555^{2222} : 7$  б)  $2^{70} + 3^{70} : 13$  в)  $a^2 + b^2 : 7 \Rightarrow a : 7 \ \& \ b : 7$   
г\*)  $a^3 + b^3 + c^3 : 7 \Rightarrow abc : 7$  д\*)  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 : 9 \Rightarrow abcde : 9$ ?
- АС1♦10.** Имеют ли уравнения а)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$  б)  $x^2 + y^2 + z^2 = 999\,999$ , соответственно, ненулевые и хоть какие-нибудь решения в целых числах?
- АС1♦11.** Верно ли, что  
а) ни одно число вида  $4k + 3$  не является суммой квадратов двух целых чисел?  
б) ни одно число вида  $10^{3k+1}$  не является суммой кубов двух целых чисел?
- АС1♦12.** Чему равно третье по величине натуральное число с остатками  
а) 2 и 7 от деления на 57 и 179 б) 2, 4, 5 от деления на 5, 7, 8  
в) 4, 5, 6 от деления на 6, 7, 8 г) 2, 4, 6 и 8 от деления на 5, 7, 8 и 9?
- АС1♦13.** Верно ли что: а)  $2^n - 1$  просто  $\Rightarrow n$  просто б)  $2^n + 1$  просто  $\Rightarrow n = 2^m$ ?  
в) Верны ли обратные импликации?
- АС1♦14.** Существуют ли ненулевые нетождественные гомоморфизмы колец:  
а)  $\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$  б)  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  в)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  г)  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  д)  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ ,  
где  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ? Верно ли, что  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$  — поле?
- АС1♦15.** Существуют ли на числовой прямой сколь угодно длинные отрезки, не содержащие ни одного простого числа?
- АС1♦16\*.** Верно ли, что среди чисел вида а)  $10 \dots 03$  б)  $3 \dots 31$  бесконечно много составных?