Модули и матрицы

АС5◇1. Модуль с одной образующей называется *циклическим*. Докажите, что
а) всякий циклический $\mathbb{Z}$-модуль изоморфен либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}/(n)$
б) всякий подмодуль циклического $\mathbb{Z}$-модуля является циклическим
в) $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}/(n) \oplus \mathbb{Z}/(m)$ циклический если и только если НОД$(m, n) = 1$.

АС5◇2. Являются ли циклическими $\mathbb{Z}$-модули **а)** $\mathbb{Z}^2$ **б)** $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n)$?

АС5◇3. Опишите $\mathbb{Z}$-модули **а)** $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(12), \mathbb{Z}/(18)\big)$ **б)** $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(18), \mathbb{Z}/(12)\big)$
в) $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(4), \mathbb{Z}/(16)\big)$ **г)** $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}/(8)\big)$ **д)** $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(16), \mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(8)\big)$.

АС5◇4. Модуль M называется *полупростым*, если для любого подмодуля $N \subset M$ существует такой подмодуль $L \subset M$, что $M = L \oplus N$. Полупросты ли $\mathbb{Z}$-модули: **а)** $\mathbb{Z}^k$ **б)** $(\mathbb{Z}/(p))^k$ **в)** $\mathbb{Z}/(p^k)$, где p — простое?

АС5◇5. Существует ли такой $\mathbb{Z}$-подмодуль $M \subset \mathbb{Z}^3$, что $\mathbb{Z}^3 = L \oplus M$, где $\mathbb{Z}$-подмодуль $L \subset \mathbb{Z}^3$ порождается столбцами матрицы: **а)** $\begin{pmatrix} 14 & -16 & 13 \\ 9 & -6 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -10 & -2 & 4 \\ -13 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -19 & -13 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -11 & -7 & -2 \end{pmatrix}$?

АС5◇6. Пусть матрица A имеет столбцы (слева направо) c_1, c_2, c_3 и строки (сверху вниз) r_1, r_2, r_3, r_4. На какую матрицу и с какой стороны надлежит умножить матрицу A, чтобы получилась матрица **а)** со строками (сверху вниз) $r_3 + 2r_4$, $3r_1 + 2r_2 + r_3$, $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$ **б)** со столбцами (слева направо) $c_1 + 2c_2$, $2c_2 + 3c_3$, $3c_3 + 4c_1$, $5c_1 + 6c_2$, $c_1 + c_2 + c_3$?

АС5◇7. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. Обозначим через $E_{ij} \in \operatorname{Mat}_n(K)$ матрицу с единицей в клетке (i, j) и нулями в остальных клетках. Составьте таблицу:
а) произведений $E_{ij}E_{k\ell}$ **б)** *коммутаторов* $[E_{ij}, E_{k\ell}] \stackrel{\text{def}}{=} E_{ij}E_{k\ell} - E_{k\ell}E_{ij}$ и
в) опишите центр[1] алгебры $\operatorname{Mat}_n(K)$.

АС5◇8. Укажите в $\operatorname{Mat}_3(\mathbb{Q})$ какую-нибудь матрицу X с $X^3 = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 32 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

АС5◇9. Найдите: **а)** $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2022}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

АС5◇10 (унипотентные матрицы). Матрица $A \in \operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ — поле, называется *унипотентной*, если $A = E + N$, где N нильпотентна. Покажите, что в зависимости от $\operatorname{char}\Bbbk$ унипотентность матрицы A равносильна тому, что **а)** $A^n = E$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, если $\operatorname{char}\Bbbk = p > 0$ **б)** $A = e^B$ для некоторой нильпотентной матрицы B, если $\operatorname{char}\Bbbk = 0$.

АС5◇11. Покажите, что однородные симметрические[2] многочлены $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ степени n образуют свободный $\mathbb{Z}$-модуль и найдите его ранг для всех $2 \leqslant m, n \leqslant 5$.

АС5◇12. Выясните, являются ли многочлены **а)** $\sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$ **б)** $\sum_{j<k} \sum_{i \notin \{j,k\}} x_i (x_j - x_k)^2$
в) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$
г) $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)$
симметрическими, и если да, выразите их через $e_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.

АС5◇13. Выразите дискриминант[3] кубического трёхчлена $x^3 + px + q$ через p и q.

АС5◇14. Найдите все комплексные решения системы уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,,\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24\,.$$

АС5◇15. Найдите сумму 4-х степеней комплексных корней многочлена $x^3 - 3x - 1$.

---

[1] *Центром* алгебры A называется подалгебра $Z(A) = \{a \in A \mid \forall\, b \in A\ ab = ba\}$.

[2] Многочлен $f \in K[x_1, \dots, x_m]$ называется *симметрическим*, если $f(x_1, \dots, x_m) = f(x_{g(1)}, \dots, x_{g(m)})$ для любой биекции $g : \{1, \dots, m\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, m\}$.

[3] *Дискриминантом* приведённого многочлена $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$ называется произведение $\prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.