

Определители

АС8♦1. Для произвольных квадратных матриц A и B выразите через $\det A$ и $\det B$

а) $\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ б) $\det \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & * \end{pmatrix}$.

АС8♦2. Как меняется определитель при отражении относительно побочной диагонали?

АС8♦3. Сколько $n \times n$ матриц определителя 1 имеется над полем из q элементов?

АС8♦4. Не прибегая к методу Гаусса вычислите

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -8 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ -3 & 10 & -13 \end{pmatrix}^{-1}$.

АС8♦5. Вычислите определитель матрицы с 1 на главной диагонали и 2 в остальных местах.

АС8♦6*. Для многочленов $f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$ и $g(x) = b_m \prod_{j=1}^m (x - \beta_j)$ произведения $R(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} a_n^m b_m^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$ и $D(f) \stackrel{\text{def}}{=} a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ называются соответственно *результантом* этих многочленов и *дискриминантом* многочлена f . Выразите:

а) $D(f)$ через $R(f, f')$ б) $D(fg)$ через $D(f)$, $D(g)$ и $R(f, g)$.

АС8♦7. Исключите x из систем уравнений: а) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16 = 2x^2 - xy + y^2 - x - y - 4 = 0$

б) $4x^2 - 7xy + y^2 + 13x - 2y - 3 = 9x^2 - 14xy + y^2 + 28x - 4y - 5 = 0$.

АС8♦8. Как связаны дискриминант приведённого многочлена $\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$ и $\det(\alpha_j^{n-i})$?

АС8♦9*. Вычислите дискриминанты многочленов: а) $\sum_{k=0}^n x^k$ б) $\sum_{k=0}^n x^k / k!$ в) $x^n + a$.

АС8♦10 (циркулянт). Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, через значения полинома $f(x) = \alpha_0 x^n + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$ на корнях $\sqrt[n+1]{1} \in \mathbb{C}$.

АС8♦11. Пусть $AB = E$. Докажите соотношение $a_{IJ} = (-1)^{|I|+|J|} b_{\bar{J}\bar{I}} \det A$ на дополнительные миноры матриц A и B .

АС8♦12. Вычислите все частные производные $\frac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1} \partial a_{i_2 j_2} \dots \partial a_{i_k j_k}}$. Если общий случай вызывает затруднения, начните с $k = 1, 2$.

АС8♦13. НОД 2×2 миноров целочисленной 3×3 матрицы равен 12. Может ли её определитель быть равен а) 28 б) 36? Может ли НОД элементов этой матрицы быть равен в) 1 г) 2 д) 3 е) 4 ж) 5 з) 6? Если да — приведите пример, нет — объясните, почему.

АС8♦14. Не прибегая к методу Гаусса вычислите инвариантные множители матриц

а) $\begin{pmatrix} 15 & -6 & 3 \\ -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 17 & -5 & -37 \\ -21 & 0 & 21 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} -3 & 24 & -27 & 9 \\ 9 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

АС8♦15. Сколько элементов в факторе \mathbb{Z}^4 / L , где $L \subset \mathbb{Z}^4$ порождается столбцами матрицы

а) $\begin{pmatrix} -6 & 8 & 0 & -7 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 7 & -6 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

АС8♦16. Существует ли комплексная 2×4 матрица с множеством 2×2 миноров

а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.