Абстрактные группы. Коммутант. Изоморфизмы.

АС11◇1. Покажите, что любая подгруппа циклической группы тоже циклическая.

АС11◇2. Пусть группа $G/Z(G)$ циклическая. Докажите, что G абелева.

АС11◇3. Наименьшее такое $n \in \mathbb{N}$, что $g^n = e$ называется *порядком* элемента g и обозначается $\operatorname{ord} g$. Верно ли, что:
а) $\forall\, n\in\mathbb{N}\;\; \operatorname{ord}(g^n) = \operatorname{ord}(g) \,/\, \text{НОД}(n, \operatorname{ord}(g))$
б) $fg = gf \Rightarrow \operatorname{ord}(fg) \,|\, \text{НОК}(\operatorname{ord}(f), \operatorname{ord}(g))$.

АС11◇4. Чему может быть равен $\operatorname{ord}(fg)$, если $\operatorname{ord}(gf) = n$?

АС11◇5. Все ли элементы нечётного порядка являются квадратами?

АС11◇6. Во всякой ли группе чётного порядка есть элемент порядка два?

АС11◇7. Покажите, что группа, все элементы которой имеют порядок два, абелева.

АС11◇8. Покажите, что любая подгруппа индекса два нормальна.

АС11◇9. Пусть $\varphi : G_1 \twoheadrightarrow G_2$ — сюрьективный гомоморфизм групп. Покажите, что полный прообраз $N_1 = \varphi^{-1}(N_2)$ любой нормальной подгруппы $N_2 \lhd G_2$ является нормальной подгруппой в G_1 и $G_1/N_1 \simeq G_2/N_2$.

АС11◇10. Пусть две нормальные подгруппы пересекаются по единице. Покажите, что их элементы коммутируют друг с другом.

АС11◇11. Докажите, что произведение $KH = \{kh \mid k \in K,\, h \in H\}$ двух подгрупп K, H является подгруппой если и только если $KH = HK$.

АС11◇12. Пусть произведение любых двух левых смежных классов некоторой подгруппы H также является левым смежным классом подгруппы H. Верно ли, что H нормальна?

АС11◇13. Перечислите левые и правые смежные классы группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ по подгруппе верхнетреугольных матриц.

АС11◇14. Докажите, что: **а)** любая подгруппа, содержащая коммутант, нормальна **б)** коммутант нормальной подгруппы нормален.

АС11◇15. Докажите, что группа $\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ — произвольное поле, порождается матрицами[1] $T_{ij}(\alpha) = E + \alpha E_{ij}$, $\alpha \in \Bbbk$, и вычислите (групповой) коммутатор $T_{ij}(\alpha)T_{k\ell}(\beta)T_{ij}^{-1}(\alpha)T_{k\ell}^{-1}(\beta)$ двух таких матриц, а также коммутатор трансвекции $T_{ij}(\alpha)$ с матрицей $D_{ij}(\gamma)$, которая получается из E заменой i-го и j-го диагональных элементов на γ и γ^{-1}, где $\gamma \in \Bbbk^\times$.

АС11◇16. Вычислите коммутант группы **а)** обратимых верхнетреугольных **б)** унитреугольных матриц над произвольным полем.

АС11◇17. Докажите, что коммутант $\mathrm{GL}_n'(\Bbbk) = \mathrm{SL}_n'(\Bbbk) = \mathrm{SL}_n(\Bbbk)$, за исключением групп $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, и вычислите коммутанты последних двух групп.

АС11◇18. Убедитесь, что *кватернионные единицы* $Q_8 = \{\pm e, \pm i, \pm j, \pm k\}$ с таким умножением, что e является единицей, «минус на минус даёт плюс», $i^2 = j^2 = k^2 = -e$ и $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, образуют группу. Изоморфна ли она D_4?

АС11◇19. Найдите все пары изоморфных групп в наборах: **а)** D_8, $D_4 \times \mathbb{Z}/(2)$, $Q_8 \times \mathbb{Z}/(2)$
б) S_4, D_{12}, $D_6 \times \mathbb{Z}/(2)$, $D_3 \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, $D_3 \times \mathbb{Z}/(4)$, $Q_8 \times \mathbb{Z}/(3)$, $D_4 \times \mathbb{Z}/(3)$.

АС11◇20. Найдите индекс подгруппы внутренних автоморфизмов в группе $\operatorname{Aut} A_5$.

АС11◇21. Приведите пример таких двух не изоморфных групп G_1, G_2 и их нормальных подгрупп $H_1 \lhd G_1$, $H_2 \lhd G_2$, что $H_1 \simeq H_2$ и $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$.

[1] Линейные операторы $\Bbbk^n \to \Bbbk^n$ с такими матрицами называются *трансвекциями*.