§8. Грассмановы многочлены и определители

8.1. Длина, знак и чётность перестановки. Биективные отображения

$$g: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}, \quad i \mapsto g_i,$$

называются *перестановками n элементов*. Перестановки образуют группу преобразований множества $\{1, \dots, n\}$ в смысле n° 0.6 на стр. 16. Эта группа обозначается $S_n = \operatorname{Aut}(\{1, \dots, n\})$ и называется *n-той симметрической группой*. Перестановку $g \in S_n$ принято записывать словом

$$g = (g_1, \dots, g_n),$$

i-тая буква которого равна значению $g_i = g(i)$ отображения g на элементе i. Например, слово

$$(2, 4, 3, 5, 1) \in S_5$$

задаёт отображение $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$, $4 \mapsto 5$, $5 \mapsto 1$. Композиция fg перестановок f, g действует по правилу $fg: i \mapsto f(g(i))$. Например, в группе S_5 две возможных композиции перестановок $f = (2, 4, 3, 5, 1)$ и $g = (3, 2, 1, 5, 4)$ суть $fg = (3, 4, 2, 1, 5)$ и $gf = (2, 5, 1, 4, 3)$.

Назовём пару возрастающих чисел $i < j$ *инверсной* для перестановки g, если $g_i > g_j$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ возрастающих пар $1 \leqslant i < j \leqslant n$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Количество инверсных пар перестановки g называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки g и обозначается $\ell(g)$.

Упражнение 8.1. Найдите $\max \ell(g)$ по всем $g \in S_n$ и укажите все перестановки на которых он достигается.

Число $\operatorname{sgn}(g) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$ называется *знаком* перестановки g. Перестановка g называется *чётной*, если $\operatorname{sgn}(g) = 1$ и *нечётной*, если $\operatorname{sgn}(g) = -1$.

Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента i, j и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается σ_{ij} и называется *транспозицией* i-го и j-го элементов.

Упражнение 8.2. Убедитесь, что каждая перестановка $g \in S_n$ является композицией транспозиций.

Разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$ иначе можно записать как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ или как $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Тем не менее чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка g, не зависит от способа разложения и совпадает с чётностью числа инверсных пар перестановки g, т. е. все чётные перестановки являются композициями чётного числа транспозиций, а нечётные — нечётного. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 8.1
$\operatorname{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\operatorname{sgn}(g)$ для любой перестановки $g \in S_n$ и любой транспозиции $\sigma_{ij} \in S_n$.

Доказательство. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= (g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_i, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_j, g_{j+1}, \dots, g_n) \\ g\sigma_{ij} &= (g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_j, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g}_i, g_{j+1}, \dots, g_n) \end{aligned} \tag{8-1}$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов g_i и g_j, стоящих на i-том и j-том местах перестановки g. В этих двух перестановках пара (i, j), а также $2(j - i - 1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова. □

Следствие 8.1
Если перестановка g является композицией m транспозиций, то $\operatorname{sgn}(g) = (-1)^m$ и чётность перестановки совпадает с чётностью числа m.

Доказательство. Тождественная перестановка не имеет инверсных пар и, стало быть, чётна. В силу леммы, перестановка получающаяся из тождественной умножением на m транспозиций, имеет чётность $(-1)^m$. □

Следствие 8.2 (знаковый гомоморфизм)
Отображение $\operatorname{sgn} : S_n \twoheadrightarrow \{+1, -1\}$, $g \mapsto (-1)^{\ell(g)}$, является мультипликативным гомоморфизмом, т. е. $\operatorname{sgn}(gh) = \operatorname{sgn}(g)\operatorname{sgn}(h)$ для всех $g, h \in S_n$, и множества чётных и нечётных перестановок суть полные прообразы элементов 1 и -1 при этом гомоморфизме. □

Пример 8.1 (правило ниточек)
Интерпретация чётности перестановки как чётности числа инверсных пар даёт практический способ отыскания чётности перестановки — не самый быстрый[1], но полезный в ряде ситуаций, с которыми мы далее столкнёмся. Напишем исходные числа и их перестановку друг под другом, как на рис. 8◇1, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вылезала за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными[2]. Тогда чётность числа инверсных пар будет равна чётности числа точек пересечения нитей.

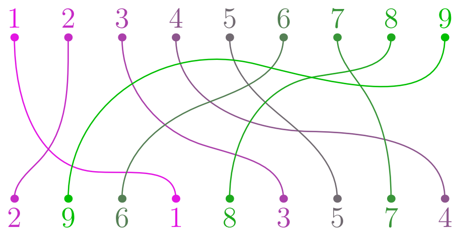

Рис. 8◇1. $\operatorname{sgn}(2,\ 9,\ 6,\ 1,\ 8,\ 3,\ 5,\ 7,\ 4) = +1$ (всего 18 пересечений).

Упражнение 8.3. Докажите это и убедитесь при помощи правила ниточек, что знак *тасующей перестановки* $(i_1, \dots, i_k,\ j_1, \dots, j_m)$, где оба набора номеров $i_1, \dots, i_k$ и $j_1, \dots, j_m$ возрастают слева направо, равен $\operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_k,\ j_1, \dots, j_m) = (-1)^{|I| + k(k+1)/2}$, где $|I| \stackrel{\text{def}}{=} i_1 + \ldots + i_k$.

[1] Обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны.

[2] Это означает, что в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём пересечение происходит трансверсально: , а не по касательной: .

8.2. Определитель. Рассмотрим произвольное коммутативное кольцо K с единицей, произвольную квадратную матрицу $C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ и обозначим через $v_1, \dots, v_n \in K^n$ её столбцы. Многочлен

$$\det C = \det(v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \dots c_{g_n n} \tag{8-2}$$

называется *определителем* матрицы C или набора векторов $v_1, \dots, v_n$. Формула (8-2) предписывает всеми возможными способами выбирать в матрице n элементов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце выбирался ровно один элемент. Каждые такие n элементов надо перемножить, а полученные $n!$ произведений сложить с надлежащими знаками, определяемыми так: множество клеток, где стоят выбранные n элементов, представляет собою график биективного отображения $j \mapsto g_j$ из множества номеров столбцов в множество номеров строк, т. е. перестановки n номеров $\{1, \dots, n\}$, и знак равен знаку этой перестановки. Например, определители матриц размеров 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \tag{8-3}$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \\ - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33} \tag{8-4}$$

(во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции).

Предложение 8.1

Определитель $\det C = \det(v_1, \dots, v_n)$ линеен по каждому столбцу v_i матрицы C, кососимметричен (т. е. $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$ если $v_i = v_j$ для некоторых $i \neq j$) и не меняется при транспонировании матрицы[1] (т. е. $\det C^t = \det C$, где $C^t = \left(c^t_{ij}\right)$ имеет $c^t_{ij} = c_{ji}$).

Доказательство. Так как каждое из $n!$ произведений, которые складываются в формуле (8-2), содержит ровно по одному сомножителю из каждого столбца, оно линейно по каждому столбцу, а значит линейна и их сумма. Если i-тый столбец матрицы C совпадает с j-тым, то $c_{g_i i} = c_{g_i j}$ и $c_{g_j j} = c_{g_j i}$ для любой перестановки $g \in S_n$. Множество всех перестановок разбивается в объединение не пересекающихся пар вида $(g, g\sigma_{ij})$, поскольку композиция с транспозицией $\sigma_{ij} : S_n \xrightarrow{\sim} S_n$, $g \mapsto g\sigma_{ij}$, является инволютивной[2] биекцией без неподвижных точек[3]. В сумме (8-2) слагаемые, отвечающие каждой паре g и $g\sigma_{ij}$ имеют вид

$$\mathrm{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} \dots c_{g_i i} \dots c_{g_j j} \dots c_{g_n n} \quad \text{и} \quad \mathrm{sgn}(g\sigma_{ij}) \cdot c_{g_1 1} \dots c_{g_j i} \dots c_{g_i j} \dots c_{g_n n}$$

и различаются только знаком, сокращая друг друга. Поэтому сумма получится нулевая. Наконец, равенство $\det C^t = \det C$ вытекает из того, что набор произведений n-ок матричных элементов в разложениях $\det C$ и $\det C^t$ одинаков, а знаки, с которыми каждое произведение входит в $\det C$ и $\det C^t$, суть знаки обратных друг другу перестановок.

Упражнение 8.4. Покажите, что знаки обратных друг другу перестановок совпадают.

Тем самым, разложения (8-2) для $\det C$ и $\det C^t$ состоят из одних и тех же слагаемых с одними и теми же знаками. □

[1] См. обсуждение перед предл. 5.4 на стр. 95.

[2] Т. е. обратной самой себе.

[3] Равенство $g = g\sigma_{ij}$ невозможно, так как умножая на g^{-1} слева, получаем $\mathrm{Id} = \sigma_{ij}$, что не так.

Следствие 8.3
Определитель является полилинейной кососимметричной функцией от строк матрицы. □

Следствие 8.4
Определитель меняет знак при любой транспозиции строк или столбцов матрицы[1].

Доказательство. В силу кососимметричности и полилинейности

$$0 = \det(\dots, (v_i + v_j), \dots, (v_i + v_j), \dots) = \det(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \det(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots),$$

что и утверждается. □

Упражнение 8.5. Убедитесь, что если $1 + 1 \neq 0$ в K, то каждая знакопеременная функция от n векторов кососимметрична.

Пример 8.2 (знакопеременные многочлены, определитель Вандермонда и базис Шура)
Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ называется *знакопеременным* если для всех перестановок $g \in S^n$

$$f(x_{g_1}, \dots, x_{g_n}) = \mathrm{sgn}(g) \cdot f(x_1, \dots, x_n).$$

Так как при транспозиции любой пары переменных знакопеременный многочлен f меняет знак, в каждом мономе $x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}$ многочлена f все степени ν_i попарно различны, и вместе с таким мономом в f входят $n!$ мономов $x_{g_1}^{\nu_1} \dots x_{g_n}^{\nu_n}$, где $g \in S_n$, причём коэффициенты при мономах $x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}$ и $x_{g_1}^{\nu_1} \dots x_{g_n}^{\nu_n}$ получаются друг из друга умножением на знак $\mathrm{sgn}(g)$. Мы заключаем, что знакопеременные многочлены образуют свободный $\mathbb{Z}$ модуль с базисом из многочленов

$$\Delta_\nu \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, x_{g_1}^{\nu_1} \dots x_{g_n}^{\nu_n} = \det(x_j^{\nu_i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix}, \tag{8-5}$$

которые нумеруются диаграммами Юнга ν из n строк попарно разных длин $\nu_1 > \dots > \nu_n \geqslant 0$. Минимальной такой диаграмме $\delta = \big((n-1), \dots, 0\big)$ отвечает *определитель Вандермонда*

$$\Delta_\delta = \det(x_j^{n-i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j). \tag{8-6}$$

Последнее равенство вытекает из того, что при подстановке $x_i = x_j$ с $j \neq i$ определитель Вандермонда, как и всякий знакопеременный многочлен, обращается в нуль, и поэтому делится в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ на $x_i - x_j$. Так все такие разности неприводимы, а кольцо $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ факториально, определитель Вандермонда делится на $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$, а поскольку лексикографически старшие мономы определителя и произведения равны $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$ и имеют коэффициент 1, частное от деления равно 1. Это рассуждение показывает, что любой знакопеременный многочлен f делится в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ на определитель Вандермонда, и частное является симметрическим многочленом. Мы заключаем, что знакопеременные многочлены образуют свободный модуль ранга 1 с базисом Δ_δ над кольцом симметрических многочленов, а симметрические *многочлены Шура* $\sigma_\lambda = \Delta_{\lambda+\delta} / \Delta_\delta$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ пробегает произвольные диаграммы Юнга из n строк, а $\lambda + \delta = (\lambda_1 + (n-1), \lambda_2 + (n-2), \dots, \lambda_n)$, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических многочленов.

[1] Функции с таким свойством называются *знакопеременными*.

8.3. Грассмановы многочлены. Алгебра *грассмановых многочленов* $K\langle\xi_1,\dots,\xi_n\rangle$ от переменных $\xi_1,\dots,\xi_n$ с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце K с единицей определяется точно также, как алгебра обычных многочленов, но только грассмановы переменные ξ_i, в отличие от обычных, не коммутируют, а *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям[1]

$$\forall\, i,j \quad \xi_i\wedge\xi_j = -\xi_j\wedge\xi_i \quad \text{и} \quad \forall\, i \quad \xi_i\wedge\xi_i = 0\,. \tag{8-7}$$

Символ «$\wedge$» здесь и далее используется для обозначения грассманова (антикоммутативного) умножения, чтобы отличать его от обычного (коммутативного). Константы из K по определению перестановочны с грассмановыми переменными, и умножение переменных на константы записывается обычным образом: $a\xi_i = \xi_i a$, для всех i и всех $a\in K$. Для каждой строго возрастающей слева направо последовательности номеров $I = (i_1,\dots,i_m)$, где $i_1 < \dots < i_m$, положим

$$\xi_I \overset{\text{def}}{=} \xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_m}\,. \tag{8-8}$$

Каждая перестановка $g = (g_1,\dots,g_m)\in S_m$ переменных в этом мономе меняет его знак по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}}\wedge\dots\wedge\xi_{i_{g(m)}} = \operatorname{sgn}(g)\cdot\xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_m}\,. \tag{8-9}$$

Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, мономы (8-9) исчерпывают всё множество грассмановых мономов, т. е. однородные грассмановы многочлены степени m от n переменных $\xi_1,\dots,\xi_n$ по-определению образуют свободный K-модуль ранга $\binom{n}{m}$ с базисом из мономов (8-8). Этот модуль обозначается Λ^m. Вся грассманова алгебра как модуль над K является конечной прямой суммой $K\langle\xi_1,\dots,\xi_n\rangle = \Lambda^0\oplus\Lambda^1\oplus\Lambda^2\oplus\,\dots\,\oplus\Lambda^n$, где младшее слагаемое $\Lambda^n\simeq K$ состоит из констант и имеет в качестве базиса моном $\xi_\varnothing\overset{\text{def}}{=}1$, отвечающий пустому набору $I=\varnothing$ и служащий единицей грассмановой алгебры, а старшее слагаемое $\Lambda^n\simeq K$ имеет в качестве базиса $\xi_{(1,\dots,n)} = \xi_1\wedge\dots\wedge\xi_n$ — единственный моном степени n, отвечающий набору $I=(1,\dots,n)$. Обратите внимание, что этот моном аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом. Умножение базисных мономов $\xi_I = \xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_k}$ и $\xi_J = \xi_{j_1}\wedge\dots\wedge\xi_{j_m}$ происходит по правилу

$$\xi_I\wedge\xi_J = \begin{cases}\operatorname{sgn}(I,J)\,\xi_{I\sqcup J} & \text{если } I\cap J=\varnothing\\ 0 & \text{если } I\cap J\neq\varnothing\,,\end{cases} \tag{8-10}$$

где $\operatorname{sgn}(I,J)$ — знак тасующей перестановки, упорядочивающей набор $(i_1,\dots,i_k,\,j_1,\dots,j_m)$ по возрастанию[2]. Так как для базисных грассмановых мономов выполняется равенство[3]

$$(\xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_k})\wedge(\xi_{j_1}\wedge\dots\wedge\xi_{j_m}) = (-1)^{km}(\xi_{j_1}\wedge\dots\wedge\xi_{j_m})\wedge(\xi_{i_1}\wedge\dots\wedge\xi_{i_k})\,,$$

однородные грассмановы многочлены коммутируют друг с другом по правилу

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{\deg\omega\deg\eta}\eta\wedge\omega\,, \tag{8-11}$$

[1]Если $1+1$ не делит нуль в K, то соотношения $\xi_i\wedge\xi_i = 0$ могут быть опущены, поскольку они вытекают из соотношений $\xi_i\wedge\xi_j = -\xi_j\wedge\xi_i$, если положить в них $i=j$. Если же $-1=1$, то антикоммутирование $\xi_i\wedge\xi_j = -\xi_j\wedge\xi_i$ не отличается от коммутирования $\xi_i\wedge\xi_j = \xi_j\wedge\xi_i$, и в этой ситуации именно соотношение $\xi_i\wedge\xi_i = 0$ отличает грассмановы переменные от обычных.

[2]Если $I\sqcup J = \{1,\dots,n\}$, то $\operatorname{sgn}(i_1,\dots,i_k,\,j_1,\dots,j_m) = (-1)^{|I|+k(k+1)/2}$ по упр. 8.3 на стр. 129.

[3]Для проноса каждой из m переменных ξ_j влево через k переменных ξ_i нужно совершить k транспозиций.

которое называется *кошулевым правилом знаков*. В частности, любой однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грассмановыми многочленами.

Упражнение 8.6. Опишите *центр* грассмановой алгебры

$$Z(K\langle \xi_1, \dots, \xi_n\rangle) \overset{\text{def}}{=} \{\tau \in K\langle \xi_1, \dots, \xi_n\rangle \mid \forall\, \omega \in K\langle \xi_1, \dots, \xi_n\rangle \;\; \tau \wedge \omega = \omega \wedge \tau\}\,.$$

8.3.1. Грассманова алгебра свободного модуля. Обозначим через V свободный K-модуль ранга r. Если векторы $e_1, \dots, e_r \in V$ образуют базис модуля V, то алгебра грассмановых многочленов $K\langle e_1, \dots, e_r\rangle$ от переменных $e_1, \dots, e_r$ обозначается ΛV и называется *грассмановой* (или *внешней*) алгеброй свободного модуля V, а подмодуль однородных грассмановых многочленов степени d обозначается $\Lambda^d V \subset \Lambda V$ и называется d-й *внешней степенью* свободного модуля V. Эти не апеллирующие к выбору базиса названия и обозначения связаны с тем, что при каждом $d = 0, 1, \dots, n$ подмодуль $\Lambda^d = \Lambda^d V \subset K\langle e_1, \dots, e_r\rangle$ однородных многочленов степени d не зависит от выбора базиса в V. В самом деле, подмодуль констант $\Lambda^0 V \simeq K$ порождается единицей грассмановой алгебры, подмодуль $\Lambda^1 V$ однородных грассмановых многочленов степени 1, т. е. множество всевозможных K-линейных комбинаций базисных векторов $e_1, \dots, e_r$, канонически отождествляется с модулем V и тоже не зависит от выбора базиса, а для прочих d подмодуль $\Lambda^d V \subset K\langle e_1, \dots, e_r\rangle$ является линейной оболочкой всевозможных произведений $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$, составленных из d произвольных векторов $v_i \in V$ и опять таки не зависит от выбора базиса. Таким образом, вся алгебра $\Lambda V = \bigoplus_{d=0}^{n} \Lambda^d V$ является прямой суммой модулей, не зависящих от выбора базиса в V.

Упражнение 8.7. Убедитесь, что $v \wedge v = 0$ и $u \wedge w = -w \wedge u$ для всех $u, v, w \in V$.

8.3.2. Линейные замены переменных и миноры. Пусть в обозначениях их предыдущего раздела n однородных грассмановых линейных форм $\eta_1, \dots, \eta_n \in \Lambda^1 V$ линейно выражается через m однородных грассмановых форм $\xi_1, \dots, \xi_m \in \Lambda^1 V$ по формуле

$$(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_m) \cdot C\,,$$

где $C \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(K)$. Тогда при каждом $d = 1, \dots, \min(m, n)$ набор мономов $\eta_J = \eta_{j_1} \wedge \ldots \wedge \eta_{j_d}$ степени d линейно выражается через набор мономов $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_d}$ степени d по формуле

$$\begin{aligned}\eta_J = \eta_{j_1} \wedge \ldots \wedge \eta_{j_d} = \Big(\sum_{i_1} \xi_{i_1} c_{i_1 j_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2} \xi_{i_2} c_{i_2 j_2}\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{i_d} \xi_{i_d} c_{i_d j_d}\Big) = \\ = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant m} \xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_d} \cdot \sum_{g \in S_d} \mathrm{sgn}(g)\, c_{i_{g(1)} j_1} \ldots c_{i_{g(d)} j_d} = \sum_I \xi_I \cdot c_{IJ}\,, \quad (8\text{-}12)\end{aligned}$$

где $I = (i_1, \dots, i_d)$ пробегает наборы из d возрастающих номеров, а $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $d \times d$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I. Определитель $c_{IJ} \overset{\text{def}}{=} \det C_{IJ}$ называется IJ-тым *минором* d-того порядка в матрице C. Таким образом, IJ-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном η_J через грассмановы мономы ξ_I равен IJ-тому минору d-того порядка в матрицы выражающей переменные η через переменные ξ. Матрица размера $\binom{n}{d} \times \binom{n}{d}$, клетки которой нумеруются лексикографически упорядоченными наборами I из d возрастающих номеров и которая имеет в клетке (IJ) минор c_{IJ} матрицы C, обозначается $\Lambda^d C$ и называется *d-й внешней степенью* матрицы C.

Предложение 8.2 (мультипликативность внешних степеней)
Для любых матриц $A \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(K)$, $B \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(K)$ над произвольным коммутативным кольцом K при всех $1 \leqslant d \leqslant \min(m,n,k)$ выполняется равенство $\Lambda^d(A\cdot B) = \Lambda^d A \cdot \Lambda^d B$. В частности, для квадратных матриц A и B одинакового размера $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Доказательство. Рассмотрим в свободном K-модуле V с базисом $\boldsymbol{e} = (e_1,\dots,e_m)$ наборы векторов $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_k) = \boldsymbol{e}\,A$ и $\boldsymbol{b} = (b_1,\dots,b_n) = \boldsymbol{a}\,B = \boldsymbol{e}\,AB$. Обозначим через $\boldsymbol{e_d} \subset \Lambda^d V$ набор из $\binom{m}{d}$ грассмановых мономов $e_I = e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_d}$, а через $\boldsymbol{b_d}, \boldsymbol{a_d} \subset \Lambda^d V$ — наборы из $\binom{n}{d}$ и $\binom{k}{d}$ грассмановых многочленов $b_J = b_{j_1}\wedge\ldots\wedge b_{j_d}$ и $a_L = a_{\ell_1}\wedge\ldots\wedge a_{\ell_d}$ соответственно. Набор мономов $\boldsymbol{e_d}$ является базисом в $\Lambda^d V$, а набор многочленов $\boldsymbol{b_d}$ выражается через него, с одной стороны, как $\boldsymbol{b_d} = \boldsymbol{e_d}\,\Lambda^d(AB)$, а с другой стороны — как $\boldsymbol{b_d} = \boldsymbol{a_d}\,\Lambda^d B = \boldsymbol{e_d}\,\Lambda^d A\,\Lambda^d B$. Поскольку матрица перехода от произвольного набора векторов к базису однозначно определяется этим набором, мы заключаем, что $\Lambda^d(A\cdot B) = \Lambda^d A\cdot\Lambda^d B$. □

Пример 8.3 (детерминантная формула для инвариантных множителей)
Из предл. 8.2 вытекает, что столбцы матрицы $\Lambda^k(AB)$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы $\Lambda^k A$. Поэтому любое число $x \in K$, делящее все $k\times k$ миноры матрицы A, делит и все $k\times k$ миноры матрицы AB для любой матрицы B, на которую A можно умножить справа. Если матрица B обратима, то $A = (AB)B^{-1}$ получается из матрицы AB правым умножением на матрицу B^{-1}, и значит, число $x\in K$, делящее все $k\times k$ миноры матрицы AB, делит и все $k\times k$ миноры матрицы A. Мы заключаем, что наибольший общий делитель $k\times k$ миноров любой матрицы A не меняется при умножении матрицы A справа на обратимые матрицы. Аналогично проверяется, что наибольший общий делитель $k\times k$ миноров матрицы A не меняется при умножении матрицы A на обратимые матрицы слева. Обозначим наибольший общий делитель всех $k\times k$ миноров матрицы A через $\Delta_k(A)$.

Если кольцо K является областью главных идеалов, то по теор. 6.1 на стр. 103 для любой матрицы A найдутся такие обратимые матрицы L и R, что у матрицы $D_A = LAR$ все элементы d_{ij} с $i\neq j$ нулевые, и $d_{ii} \mid d_{jj}$ при $i<j$. Поскольку $\Delta_k(D_A) = d_{11}\ldots d_{kk}$ и $\Delta_k(A) = \Delta_k(D_A)$, мы заключаем, что $d_{ii} = \Delta_i(A)/\Delta_{i-1}(A)$, если $\Delta_{i-1}(A)\neq 0$, а если $\Delta_k(A) = 0$ при каком-то k, то $d_{jj} = 0$ при всех $j\geqslant k$. Это даёт новое доказательство независимости нормальной формы Смита[1] D_A и инвариантных множителей d_{ii} матрицы A от способа её приведения к нормальной форме Смита.

Пример 8.4 (дискриминант соизмеримой подрешётки и формула Пика)
Пусть $\mathbb{Z}$-подмодуль $U\subset\mathbb{Z}^n$ таков, что фактор $\mathbb{Z}^n/U$ конечен. Обозначим через $\boldsymbol{e}$ какой-нибудь базис в $\mathbb{Z}^n$, а через $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}\,C_{\boldsymbol{eu}}$ — какой-нибудь базис в U. Абсолютная величина определителя матрицы $C_{\boldsymbol{eu}}$ называется *дискриминантом* соизмеримой[2] с $\mathbb{Z}^n$ подрешётки U и обозначается

$$D_U \overset{\text{def}}{=} |\det C_{\boldsymbol{eu}}|\,.$$

Упражнение 8.8. Покажите, что если матрица $C\in\mathrm{Mat}_n(K)$ обратима, то $\det C$ обратим в K.

Из упражнения вытекает, что дискриминант не зависит от выбора базисов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{u}$, так как для любых других базисов $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}\,C_{\boldsymbol{ev}}$ в $\mathbb{Z}^n$ и $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\,C_{\boldsymbol{uw}}$ в L матрицы переходов $C_{\boldsymbol{ve}} = C_{\boldsymbol{ev}}^{-1}$ и $C_{\boldsymbol{uw}}$, будучи обратимыми над $\mathbb{Z}$, имеют определители ±1, откуда

$$|\det C_{\boldsymbol{vw}}| = |\det(C_{\boldsymbol{ve}}C_{\boldsymbol{eu}}C_{\boldsymbol{uw}})| = |\det(C_{\boldsymbol{ve}})\,\det(C_{\boldsymbol{eu}})\,\det(C_{\boldsymbol{uw}})| = |\det C_{\boldsymbol{eu}}|\,.$$

[1] См. n° 6.1.1 на стр. 103.
[2] См. предл. 7.2 на стр. 125.

Беря качестве $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{u}$ взаимные базисы $v_1, \dots, v_n$ и $\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n$, заключаем, что дискриминант $D_U = \lambda_1 \dots \lambda_n$ равен числу элементов в факторе $\mathbb{Z}^n / U \simeq \mathbb{Z}/(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(\lambda_n)$.

На геометрическом языке[1] дискриминант D_U решётки $L \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ равен евклидову объёму[2] параллелепипеда Π, натянутого в пространстве $\mathbb{R}^n$ на какой-нибудь базис решётки U. Такой параллелепипед называется *фундаментальным параллелепипедом* решётки U. Его сдвиги на векторы решётки покрывают всё пространство $\mathbb{R}^n$, не имея при этом общих внутренних точек. Каждый элемент фактора $\mathbb{Z}^n / U$ представляется точкой, лежащей в Π. При этом каждая внутренняя точка Π не сравнима по модулю U ни с какими другими точками из Π, каждая внутренняя точка любой $(n-1)$-мерной гиперграни Π сравнима ещё ровно с одной точкой из Π, лежащей на параллельной гиперграни, каждая внутренняя точка любой $(n-2)$-мерной грани Π сравнима ровно с тремя точками из Π, лежащими на трёх параллельных $(n-2)$-мерных гранях, и т. д. Каждая вершина Π сравнима с остальными $2^n - 1$ вершинами. Мы заключаем, что объём Π, равный числу элементов в факторе $\mathbb{Z}^n/U$, может быть вычислен по *формуле Пика*:

$$\operatorname{Vol} \Pi = \sum\nolimits_{d=0}^{n} p_d / 2^{n-d} \,,$$

где p_d при $d < n$ обозначает число точек, лежащих внутри d-мерных граней Π, а p_n — число внутренних точек самого Π.

8.3.3. Соотношения Лапласа. Для каждого набора из m возрастающих индексов

$$J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$$

положим $\deg J \stackrel{\text{def}}{=} m$, $|J| \stackrel{\text{def}}{=} j_1 + \dots + j_m$ и обозначим через $\overline{J} = (\overline{j}_1, \dots, \overline{j}_{n-m}) = \{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ дополнительный к J набор из $n - m$ возрастающих индексов. Для произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}_n(K)$ рассмотрим в грассмановой алгебре $K\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ набор из n линейных форм

$$\alpha_j = \xi_1 a_{1j} + \xi_2 a_{2j} + \dots + \xi_n a_{nj} \,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j \leqslant r \,, \tag{8-13}$$

или, в матричных обозначениях, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n) A$. Для двух наборов индексов I, J одинаковой длины $\deg I = \deg J = m$ произведения

$$\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_m} \quad \text{и} \quad \alpha_{\overline{I}} = \alpha_{\overline{i}_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{\overline{i}_{n-m}}$$

имеют дополнительные степени m и $n - m$. Перемножая их по формуле (8-10), получим[3]

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\overline{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{8-14}$$

Подставляя в равенство (8-14) разложения (8-13) и пользуясь формулами (8-12), в левой части равенства получим

$$\left(\sum_M \xi_M a_{MJ} \right) \wedge \left(\sum_L \xi_L a_{L\overline{I}} \right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n \sum_M (-1)^{|M|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} \,,$$

[1] См. лекцию http://video.bogomolov-lab.ru/gorod/ps/stud/geom_ru/2122/lec_08.pdf.

[2] См. раздел 1.2.1 на стр. 133 лекции http://video.bogomolov-lab.ru/gorod/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

[3] Знак соответствующей тасующей перестановки был вычислен в упр. 8.3 на стр. 129.

где M пробегает все индексы длины $\deg M = m$, а в правой части при $I \neq J$ по-прежнему будет 0, а при $I = J$ получится $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|J|} \det A \cdot \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$. Мы заключаем, для любых двух наборов J, I из m столбцов произвольной квадратной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum_M (-1)^{|M|+|J|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J, \\ 0 & \text{при } I \neq J, \end{cases} \tag{8-15}$$

где суммирование идёт по всем наборам M из m строк матрицы A.

При $I = J$ соотношение (8-15) даёт формулу для вычисления определителя $\det A$ через всевозможные миноры a_{MJ} порядка m, сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\overline{JM}}$ порядка $n - m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, содержащих минор a_{MJ}:

$$\det A = \sum_M (-1)^{|M|+|J|} a_{MJ} a_{\overline{MJ}} \,. \tag{8-16}$$

Произведение $(-1)^{|M|+|J|} a_{\overline{MJ}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору a_{MJ}. При $I \neq J$ соотношение (8-15) с точностью до знака имеет вид

$$\sum_M (-1)^{|M|+|I|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} = 0 \tag{8-17}$$

и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку левая часть в (8-17) отличается от (8-16) тем, что миноры a_{MJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения, а на дополнения к сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$ минорам a_{MI}.

Упражнение 8.9. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_M (-1)^{|I|+|M|} a_{JM} a_{\overline{IM}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J. \end{cases} \tag{8-18}$$

Если обозначить через $\Lambda^m A^\vee$ матрицу размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, клетки которой, как и у матрицы $\Lambda^m A$, нумеруются m-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$, но в клетке (IJ) стоит *алгебраическое дополнение* к JI-минору[1] матрицы A, т. е. $(-1)^{|I|+|J|} a_{\overline{JI}}$, то все соотношения (8-15) и (8-18) можно свернуть в одно матричное равенство

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^m A^\vee = \Lambda^m A^\vee \cdot \Lambda^m A = \det(A) \cdot E \,, \tag{8-19}$$

где E — единичная матрицу размера $\binom{n}{d} \times \binom{n}{d}$. Матрица $\Lambda^m A^\vee$ называется *присоединённой* к матрице $\Lambda^m A$.

Пример 8.5 (соотношение Плюккера)
Рассмотрим 2×4 матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

[1] Обратите внимание, что индексы I и J преставились!

с элементами из кольца $K = \mathbb{Z}[a_{11}, \dots, a_{22}]$ многочленов от восьми переменных a_{ij} и обозначим через $A_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, её 2×2 минор, образованный i-м и j-м столбцами. Раскладывая нулевой определитель

$$0 = \det \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

по первым двум строкам, заключаем, что шесть миноров A_{ij} связаны *соотношением Плюккера*

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0\,. \tag{8-20}$$

Упражнение 8.10. Убедитесь, для любого поля $\Bbbk$ и любых шести чисел $A_{ij} \in \Bbbk$, удовлетворяющих соотношению (8-20), существует матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\Bbbk)$ с 2×2 минорами A_{ij}.

Мы заключаем, что шесть чисел A_{ij} из поля $\Bbbk$ являются минорами 2×4 матрицы с элементами из $\Bbbk$ если и только если они удовлетворяют соотношению Плюккера (8-20).

Пример 8.6 (определитель пучка матриц)
Рассмотрим квадратные матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ и пару коммутирующих переменных x, y. Матрица $x\,A + y\,B$ имеет элементы в $K[x, y]$, и её определитель $\det(x\,A + y\,B)$ является однородным многочленом степени n от x и y. Покажем, что его коэффициент при $x^m y^{n-m}$ равен

$$\mathrm{tr}(\Lambda^m A \cdot \Lambda^m B^\vee) = \sum\nolimits_{IJ} (-1)^{|I|+|J|} a_{IJ} b_{\overline{IJ}}\,, \tag{8-21}$$

где суммирование идёт по всем m-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, \dots, n\}$. Для этого рассмотрим наборы линейных форм $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)\,A$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)\,B$ от грассмановых переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда

$$\det(xA + yB) \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n = (x\alpha_1 + y\beta_1) \wedge (x\alpha_2 + y\beta_2) \wedge \ \dots \ \wedge (x\alpha_n + y\beta_n)\,.$$

Моном $x^m y^{n-m}$ возникает при выборе первого слагаемого в каких-либо m скобках, скажем, с номерами $i_1, \dots, i_m$, и второго слагаемого во всех остальных скобках. Вклад такого произведения в коэффициент при $x^m y^{n-m}$ равен

$$\begin{aligned} &\mathrm{sgn}(i_1, \dots, i_m, \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{n-m}) \cdot \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \wedge \beta_{\bar{i}_1} \wedge \dots \wedge \beta_{\bar{i}_{n-m}} = \\ &\qquad = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |I|} \alpha_I \wedge \beta_{\bar{I}} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |I|} \Big(\sum_J \xi_J a_{JI} \Big) \wedge \Big(\sum_M \xi_M b_{M\bar{I}} \Big) = \\ &\qquad\quad = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |I|} \sum_{JM} a_{JI} \cdot b_{M\bar{I}} \cdot \xi_J \wedge \xi_M = \Big(\sum_J (-1)^{|I|+|J|} a_{JI} \cdot b_{\overline{JI}} \Big) \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n. \end{aligned}$$

Коэффициент при $x^m y^{n-m}$ в $\det(x\,A + y\,B)$ равен сумме этих вкладов по всем наборам I из m возрастающих номеров, что и даёт формулу (8-21).

8.4. Присоединённая матрица. При $m = 1$ в вычислениях из n° 8.3.3 на стр. 135 наборы $I = (i)$, $J = (j)$ содержат по одному индексу и миноры $a_{IJ} = a_{ij}$ превращаются в матричные элементы, так что $\Lambda^1 A = A$. Присоединённая матрица $\Lambda^1 A^\vee$ в этом случае обозначается просто $A^\vee = (a_{ij}^\vee)$ и называется *присоединённой* к матрице A. Она имеет в клетке (i, j) определитель $(n-1)\times(n-1)$-подматрицы, получающейся из A выкидыванием креста с центром в клетке (j, i), т. е.

$$a_{ij}^\vee = (-1)^{i+j} a_{\overline{ji}}\,.$$

Соотношения Лапласа из форм. (8-19) на стр. 136 в этом случае превращаются в равенства

$$AA^\vee = A^\vee A = \det(A)\cdot E \tag{8-22}$$

в алгебре матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$.

8.4.1. Формула для обратной матрицы. Если определитель матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ обратим в K, то по (8-22) матрица A тоже обратима, и $A^{-1} = A^\vee / \det A$. Наоборот, если матрица A обратима, то $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$, и $\det A$ обратим в K. Мы получаем

Предложение 8.3
Квадратная матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ с элементами из произвольного коммутативного кольца K с единицей обратима если и только если $\det A$ обратим в K, и в этом случае $A^{-1} = A^\vee/\det A$. □

Пример 8.7
Для матриц размера 2×2 и 3×3 с определителем 1

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{31}) & (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{32}) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{pmatrix}.$$

В общем случае все элементы матриц в правых частях надо поделить на $\det A$.

8.4.2. Разложение определителя по строке или столбцу. Вычисляя элемент в позиции ii первого произведения в (8-22), получаем равенство

$$\det A = \sum\nolimits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \tag{8-23}$$

которое называется *разложением определителя по i-той строке*. Симметричным образом, вычисление jj-того элемента второго произведения в (8-22) даёт *разложение по j-му столбцу*

$$\det A = \sum\nolimits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}\,. \tag{8-24}$$

Например, разложение определителя 3×3 по первому столбцу имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \\ = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right)\,.$$

8.4.3. Правило Крамера для систем однородных линейных уравнений. Рассмотрим систему n линейных однородных уравнений на $n+1$ неизвестных

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n0}x_1 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{8-25}$$

и построим по матрице $A = (a_{ij})$ её коэффициентов вектор $\alpha = (A_0, A_1, \dots, A_n) \in K^{n+1}$, у которого i-я координата равна умноженному на $(-1)^i$ определителю квадратной $n \times n$-матрицы, получающейся из $n \times (n+1)$-матрицы A выкидыванием i-того столбца:

$$A_i = (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,0} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{8-26}$$

Покажем, что вектор α является решением системы (8-25). Дописывая к матрице A сверху ещё один экземпляр её i-той строки, мы получим квадратную матрицу размера $(n+1)\times(n+1)$ с нулевым определителем. Раскладывая этот определитель по верхней строке, получаем равенство $a_{i0}A_0 + \dots + a_{in}A_n = 0$, справедливое при каждом i.

Упражнение 8.11. Проверьте, что если кольцо $K = \Bbbk$ является полем, то уравнения (8-25) линейно независимы если и только если $\alpha \neq 0$, и в этом случае решения системы (8-25) образуют в $\Bbbk^{n+1}$ одномерное векторное подпространство, порождённое вектором α.

Например, в векторном пространстве $\Bbbk^3$ пересечение не совпадающих плоскостей

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

является прямой с направляющим вектором $(a_2b_3 - a_3b_2,\ -a_1b_3 + a_3b_1,\ a_1b_2 - a_2b_1)$.

8.4.4. Правило Крамера для систем неоднородных уравнений. По предл. 5.6 на стр. 97 столбцы $v_1, \dots, v_n$ квадратной матрицы $C \in \mathrm{Mat}_n(K)$ образуют базис модуля K^n если и только если матрица C обратима, что по предл. 8.3 равносильно обратимости в K её определителя $\det(v_1, \dots, v_n) = \det C$. Если это так, то коэффициенты разложения

$$w = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$$

произвольного вектора $w \in K^n$ по базису $v_1, \dots, v_n$ вычисляются по *правилу Крамера*

$$x_i = \frac{\det\left(v_1, \dots, v_{i-1},\ w,\ v_{i+1}, \dots, v_n\right)}{\det(v_1, \dots, v_n)}, \tag{8-27}$$

так как

$$\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = \det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, \sum\nolimits_\nu x_\nu v_\nu, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = \\ = \sum\nolimits_\nu x_\nu \det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_\nu, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = x_i \det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\right) .$$

8.4.5. Тождество Гамильтона – Кэли. Для любого коммутативного кольца K с единицей кольцо квадратных матриц $\mathrm{Mat}_n(K[t])$ с элементами из кольца многочленов $K[t]$ совпадает с кольцом многочленов $\mathrm{Mat}_n(K)[t]$ от переменной t с коэффициентами в $\mathrm{Mat}_n(K)$, поскольку каждую матрицу, в клетках которой стоят многочлены от t, можно записать как многочлен от t с матричными коэффициентами и наоборот. Например,

$$\begin{pmatrix} 3t^2+2t & t^3-1 \\ 2t+3 & t^3+t-1 \end{pmatrix} = t^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определение 8.1 (характеристический многочлен)
Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ многочлен

$$\chi_A(t) \overset{\text{def}}{=} \det(tE - A) = t^n - \sigma_1(A)\cdot t^{n-1} + \ \dots\ + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(A)\cdot t + (-1)^n\sigma_n(A) \in K[t]$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы A. Коэффициент при t^{n-k} в характеристическом многочлене обозначается через $(-1)^k\sigma_k(A)$.

Упражнение 8.12. Убедитесь, что число $\sigma_k(A) \in K$ равно сумме *главных* $k\times k$ *миноров*[1] матрицы A. В частности, $\sigma_1(A) = \mathrm{tr}(A)$ и $\sigma_n(A) = \det A$ суть *след* и *определитель* матрицы A.

Теорема 8.1 (тождество Гамильтона – Кэли)
Рассмотрим кольцо $K = \mathbb{Z}[a_{ij}]$ многочленов с целыми коэффициентами от n^2 переменных a_{ij}, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ удовлетворяет в $\mathrm{Mat}_n(K)$ соотношению $\chi_A(A) = 0$.

Доказательство. Согласно форм. (8-22) на стр. 138, в кольце $\mathrm{Mat}_n(K[t])$ выполняется соотношение $\det(tE-A)\cdot E = (tE-A)(tE-A)^\vee$, где $(tE-A)^\vee \in \mathrm{Mat}_n(K[t])$ — матрица, присоединённая[2] к $(tE - A)$. Перепишем это равенство в виде равенства между многочленами от t с коэффициентами в кольце матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$:

$$t^nE - \sigma_1(A)\,t^{n-1}E + \dots + (-1)^n\sigma_n(A)\,E = (tE-A)(t^mA_m + \dots + t\,A_1 + A_0),$$

где $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathrm{Mat}_n(K)$ — некоторые матрицы. Подставляя в него $t = A$, получаем в кольце $\mathrm{Mat}_n(K)$ равенство $\chi_A(A)\cdot E = 0$, откуда $\chi_A(A) = 0$. □

Упражнение 8.13. Пусть $f(t) = \sum_{i=0}^m t^iA_i$, $g(t) = \sum_{j=0}^n t^jB_j \in \mathrm{Mat}_r(K)[t]$ и

$$h(t) = f(t)g(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{m+n} t^kH_k \in \mathrm{Mat}_r(K)[t]\,,\ \text{где } H_k = \sum_{i+j=k} A_iB_j\,,$$

а матрица $C \in \mathrm{Mat}_r(K)$ такова, что $CA_i = A_iC$ при всех i. Убедитесь, что $f(C)g(C) = h(C)$ в $\mathrm{Mat}_r(K)$.

[1] Т. е. определителей таких $k\times k$ подматриц в A, главная диагональ которых является подмножеством главной диагонали матрицы A.

[2] См. n° 8.4 на стр. 138.

8.5. Результант. Пусть многочлены $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ имеют коэффициенты в произвольном поле $\Bbbk$ и $a_nb_m \neq 0$. Обозначим через $V_k \subset \Bbbk[x]$ векторное пространство многочленов степени строго меньше k. Наличие у f и g общего корня в каком-нибудь поле $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ равносильно тому, что $\deg \text{нод}(f, g) \geqslant 1$, а это в свою очередь эквивалентно существованию таких не равных одновременно нулю многочленов $h_1 \in V_m$ и $h_2 \in V_n$, что $fh_1 + gh_2 = 0$.

Упражнение 8.14. Убедитесь в этом.

Мы заключаем, что многочлены f и g тогда и только тогда имеют общий корень в каком-нибудь расширении $\mathbb{F} \supset \Bbbk$, когда $\Bbbk$-линейное отображение

$$V_m \oplus V_n \to V_{m+n}\,, \quad (h_1, h_2) \mapsto fh_1 + gh_2\,, \tag{8-28}$$

имеет ненулевое ядро. Поскольку $\dim(V_m \oplus V_n) = m + n = \dim V_{m+n}$, это условие выражается равенством нулю определителя матрицы отображения (8-28) в каких-нибудь базисах. В стандартных базисах $(1, 0), (x, 0), \ldots, (x^{m-1}, 0), (0, 1), (0, x), \ldots, (0, x^{n-1})$ в $V_m \oplus V_n$ и $1, x, \ldots, x^{m+n-1}$ в V_{m+n} отображение (8-28) имеет матрицу

$$\begin{array}{c}\left.\begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & a_0 & b_{m-1} & \ddots & b_0 \\ a_n & \ddots & a_1 & b_m & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & b_{m-1} \\ & & a_n & & & b_m \end{pmatrix}\right\} m+n \\ \underbrace{\hspace{5em}}_{m}\underbrace{\hspace{7em}}_{n}\hspace{3em}\end{array} \tag{8-29}$$

(в столбцах записаны коэффициентов многочленов f и g, последовательно сдвигаемые на одну клетку вниз при движении слева направо, все остальные элементы матрицы нулевые). Определитель матрицы (8-29) называется *детерминантом Сильвестра* многочленов f, g. Таким образом, многочлены $f, g \in \Bbbk[x]$ имеют общий корень в некотором расширении $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ поля $\Bbbk$, если и только если их детерминант Сильвестра обращается в нуль.

Рассмотрим теперь кольцо $K = \mathbb{Z}[a_n, b_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m]$ и многочлены

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \overset{\text{def}}{=} a_n \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i) \\ B(x) &= b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m \overset{\text{def}}{=} b_m \prod_{j=1}^{n}(x - \beta_j)\,, \end{aligned} \tag{8-30}$$

лежащие в кольце $K[x]$. Элемент $R_{A,B}$ кольца K, задаваемый равенствами

$$R_{A,B} \overset{\text{def}}{=} a_n^m b_m^n \prod_{ij}(\alpha_i - \beta_j) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} B(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{j=1}^{m} A(\beta_j) \tag{8-31}$$

называется *результантом* многочленов (8-30). Будучи симметрическим как по переменным α_i, так и по переменным β_j, результант лежит в подкольце кольца K, состоящем из многочленов от a_n, b_m и от элементарных симметрических многочленов $e_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $e_\ell(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Предложение 8.4
Результант $R_{A,B}$ равен в кольце K детерминанту Сильвестра многочленов (8-30). Кроме того, существуют такие многочлены $\varphi, \psi \in K[x]$, что $A(x) \cdot \varphi(x) + B(x) \cdot \psi(x) = R_{A,B}$.

Доказательство. Обозначим матрицу (8-29) через S. По предыдущему для любых многочленов $\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \ldots + \varphi_{n-1} x^{n-1}$ и $\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x + \ldots + \psi_{m-1} x^{m-1}$ столбец коэффициентов многочлена $A\varphi + B\psi$ является результатом умножения столбца $(\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}, \psi_0, \ldots, \psi_{n-1})^t$ слева на матрицу S. Из равенства $S \cdot S^\vee = \det(S) \cdot E$ вытекает, что в первом столбце матрицы $S^\vee$ выписаны друг под другом коэффициенты таких многочленов $\varphi, \psi \in K[x]$, что

$$A(x) \cdot \varphi(x) + B(x) \cdot \psi(x) = \det S \in K\,. \tag{8-32}$$

Рассмотрим $\det S \in \mathbb{Z}[a_n, b_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m]$ как многочлен от α_i с коэффициентами в кольце многочленов от всех остальных переменных. Полагая $\alpha_i = \beta_j$ и подставляя в равенство (8-32) $x = \alpha_i = \beta_j$ получаем в левой части нуль, поскольку при $\alpha_i = \beta_j$ оба многочлена $A(x)$ и $B(x)$ обращаются в нуль при $x = \alpha_i = \beta_j$. Поэтому $\det S$ делится в кольце K на все разности $\alpha_i - \beta_j$. Так как кольцо $K = \mathbb{Z}[a_n, b_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m]$ факториально, а все эти разности неприводимы и попарно не ассоциированы, $\det S$ делится на $\prod_{ij}(\alpha_i - \beta_j)$. С другой стороны, по формулам Виета $a_k = (-1)^{n-k} a_n e_{n-k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $b_k = (-1)^{m-k} b_m e_{m-k}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, где e_i — элементарные симметрические многочлены. Поэтому первые m столбцов матрицы S делятся на a_n, а последние n — на b_m. Тем самым $\det S$ делится на $a_n^m b_m^n \prod_{ij}(\alpha_i - \beta_j) = R_{A,B}$. Поскольку лексикографически старшие члены у $\det S$ и $R_{A,B}$ оба равны $a_n^m b_m^n (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^m$, мы заключаем, что частное от деления равно 1. □

Пример 8.8 (исключение переменных)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ пара чисел $(x_0, y_0) \in \Bbbk^2$ тогда и только тогда является решением системы полиномиальных уравнений $f(x,y) = g(x,y) = 0$, где $f, g \in \Bbbk[x,y]$, когда многочлены $f(x,y) = f_x(y)$ и $g(x,y) = g_x(y)$, рассматриваемые как многочлены от y с коэффициентами в кольце $\Bbbk[x]$, имеют при $x = x_0$ общий корень $y = y_0$, что равносильно обращению в нуль при $x = x_0$ результанта $R_{f_x, g_x} \in \Bbbk[x]$ этих двух многочленов от y. Таким образом каждая система из двух полиномиальных уравнений на x, y сводится к одному полиномиальному уравнению на x — обращению в нуль детерминанта Сильвестра, составленного из лежащих в $\Bbbk[x]$ коэффициентов многочленов $f_x, g_x \in \Bbbk[x][y]$. Эта процедура называется *исключением переменной* y из уравнений $f(x,y) = g(x,y) = 0$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 8.1. $\max \ell(g) = n(n-1)/2$ достигается на единственной перестановке $(n, n-1, \dots, 1)$.

Упр. 8.2. Индукция по n. Каждая перестановка $g = (g_1, \dots, g_n)$ является композицией $g = \sigma \circ g'$ транспозиции σ, переставляющей между собою элементы n и g_n, и перестановки $g' = \sigma \circ g$, оставляющей элемент n на месте. По индукции, g' раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемент n.

Упр. 8.3. Когда все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, идущие из i и из j пересекаются между собою нечётное число раз, если пара (i, j) инверсна, и чётное, если не инверсна[1]. Для тасующей перестановки $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$ нити, выходящие из $i_1, \dots, i_k$ верхней строки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно, $i_1 - 1, i_2 - 2, \dots, i_k - k$ начинающихся левее нитей, выходящих из j-точек верхней строки, причём все эти нити не пересекаются между собою.

Упр. 8.4. Если g является композицией транспозиций $\sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1$, то $g^{-1} = \sigma_1 \dots \sigma_k$ является произведением тех же транспозиций в противоположном порядке.

Упр. 8.6. При чётном n центр алгебры $K\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном n — мономами чётных степеней и старшим мономом $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$, имеющим в этом случае нечётную степень.

Упр. 8.8. Беря определители в равенстве $C \cdot C^{-1} = E$, получаем $\det(C) \cdot \det(C^{-1}) = \det E = 1$.

Упр. 8.9. Это следует из равенств $\det A = \det A^t$ и $(AB)^t = B^t A^t$.

Упр. 8.10. Если все $A_{ij} = 0$, положим $A = 0$, если, скажем, $A_{12} \neq 0$, положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что равенство

$$A_{34} = \det \begin{pmatrix} -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$$

эквивалентно соотношению Плюккера из форм. (8-20) на стр. 137.

Упр. 8.11. Если стоящие в левых частях уравнений (8-25) линейные формы

$$\alpha_i = \left(a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}\right) \in \Bbbk^{n+1^*}$$

линейно независимы, то по лемме о замене[2] ими можно заменить подходящие n ковекторов стандартного базиса в $\Bbbk^{n+1^*}$. Пусть это будут последние n базисных ковекторов. Коль скоро ковектор $(1, 0, \dots, 0)$ и ковекторы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ образуют базис, определитель, составленный из строк их координат, отличен от нуля. Раскладывая его по строке $(1, 0, \dots, 0)$, видим, что он равен A_0, откуда $A_0 \neq 0$. Если же строки матрицы A линейно зависимы, то все $A_i = 0$.

[1] На самом деле картинку всегда можно нарисовать так, чтобы количества точек пересечения в этих двух случаях равнялись 1 и 0 соответственно

[2] См. лемму 4.2 на стр. 48 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_04.pdf.

Упр. 8.12. Это вытекает из прим. 8.6 на стр. 137. Полагая в форм. (8-21) на стр. 137 $x = 1$, $y = t$ и $B = E$, получаем разложение

$$\det(tE + A) = t^n + \sum_{m=1}^{n} t^{n-m} \sum\nolimits_{\#I=m} a_{II} =$$
$$= t^n + t^{n-1} \sum\nolimits_i a_{ii} + t^{n-1} \sum\nolimits_{i<j} (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) + \ldots + t \sum\nolimits_i a_{\overline{ii}} + \det A\,,$$

где коэффициент при t^{n-k} равен сумме определителей всех $k \times k$ подматриц в A с главной диагональю, содержащейся в главной диагонали матрицы A.

Упр. 8.13. $f(C)g(C) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} C^i A_i C^j B_j = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} C^{i+j} A_i B_j = \sum_{k=0}^{m+n} C^k \sum_{i+j=k} A_i B_j = = \sum_{k=0}^{m+n} C^k H_k = h(C)$.

Упр. 8.14. Если $f = h\varphi$, $g = h\psi$, где $\deg h > 0$, то $\deg \varphi < n$, $\deg \psi < m$ и $f\psi - g\varphi = 0$. Если же f и g взаимно просты, то из равенства $fh_1 = -gh_2$ вытекает, что $g \mid h_1$, а $f \mid h_2$, что невозможно для ненулевых h_1, h_2 с $\deg h_1 < m$ и $\deg h_2 < n$.