Идеалы, факторкольца и разложение на множители

АЛ4◇1*. Для нётерова коммутативного кольца K докажите, что $K[\![x]\!]$ тоже нётерово.

АЛ4◇2*. Покажите, что $\{f \in \mathbb{C}[\![z]\!] \mid \forall z \in \mathbb{C}\ f(z) \text{ сходится}\}$ — это не нётерово кольцо.

АЛ4◇3. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, $I, J \subset A$ — произвольные идеалы. Положим[1] $\sqrt{I} \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N}:\ a^n \in I\}$, $I + J \overset{\text{def}}{=} (I, J) = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$ и обозначим через IJ идеал, порождённый произведениями[2] ab с $a \in I$, $b \in J$. Верно ли, что[3]

а) произведения ab с $a \in I$, $b \in J$ уже и сами по себе образуют идеал

б) $\sqrt{I}$ это идеал **в)** $IJ = I \cap J$ **г)** $I + J = A \Rightarrow IJ = I \cap J$

д) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ **е)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ **ж)** $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

АЛ4◇4 (китайская теорема об остатках). Пусть идеалы $I_1, \dots, I_m$ коммутативного кольца A с единицей таковы, что $I_i + I_j = A$ для всех $i \neq j$. Покажите, что $I_1 \dots I_m = I_1 \cap \dots \cap I_m$ и постройте изоморфизм $A/I_1 \dots I_m \xrightarrow{\sim} (A/I_1) \times \dots \times (A/I_m)$.

АЛ4◇5*. Докажите, что **а)** простой идеал $\mathfrak{p}$ содержит пересечение конечного набора идеалов если и только если $\mathfrak{p}$ содержит один из них **б)** идеал I содержится в объединении конечного набора простых идеалов если и только если I лежит в одном из них.

АЛ4◇6*. Сопоставим вещественному числу $p \in [0\,,1]$ множество $\mathfrak{m}_p$ всех таких непрерывных функций $[0\,,1] \to \mathbb{R}$, что $f(p) = 0$. Покажите, что это задаёт биекцию между точками отрезка $[0\,,1]$ и максимальными идеалами в кольце непрерывных функций $[0\,,1] \to \mathbb{R}$.

АЛ4◇7*. Всякий ли простой идеал кольца непрерывных функций $[0\,,1] \to \mathbb{R}$ максимален?

АЛ4◇8. Укажите непростой неприводимый элемент в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$.

АЛ4◇9. Сколько решений $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ имеют уравнения **а)** $x^2 + y^2 = n$ **б)** $x^2 + xy + y^2 = n$ в зависимости от $n \in \mathbb{N}$?

АЛ4◇10. Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ все различны. Приводимы ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены:

а) $(x - a_1) \dots (x - a_n) - 1$ **б)** $(x - a_1)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$

АЛ4◇11*. Пусть многочлен $f(x) = x^p - x - a \in \mathbb{F}_p[x]$ имеет корень ζ в некотором поле $\mathbb{K} \supset \mathbb{F}_p$. Явно укажите в $\mathbb{K}$ ещё $p - 1$ корней многочлена f. Верно ли, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен f либо неприводим, либо полностью разлагается на линейные множители?

АЛ4◇12*. Докажите, что целостное нётерово кольцо факториально если и только если все его минимальные по включению ненулевые простые идеалы являются главными.

АЛ4◇13. Пусть $d \in \mathbb{N}$ не делится на квадраты. Обозначим через $\mathcal{O}_{\sqrt{-d}} \subset \mathbb{C}$ множество чисел вида $a + b\zeta_d$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, а $\zeta_d = \begin{cases} (1 + i\sqrt{d})/2 & \text{при } d \equiv 3 \pmod 4 \\ i\sqrt{d} & \text{при } d \equiv 1, 2 \pmod 4). \end{cases}$ Убедитесь, что $\mathcal{O}_{\sqrt{-d}}$ является подкольцом в $\mathbb{C}$ и докажите, что **а)** оно евклидово для высоты $\nu(z) = |z|^2$ если и только если $\mathbb{C}$ покрывается сдвигами единичного круга на векторы из $\mathcal{O}_{\sqrt{-d}}$ **б*)** это так для $d = 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11$ и только для них **в*)** для всех прочих d кольцо $\mathcal{O}_{\sqrt{-d}}$ не евклидово ни для какой высоты[4]. **г*)** Для $d = 19$ кольцо $\mathcal{O}_{\sqrt{-d}}$ является областью главных идеалов.

---

[1] $\sqrt{I}$ называется *радикалом* идеала I.

[2] Т. е. пересечение всех идеалов, содержащих эти произведения, или (что то же самое) — множество всевозможных сумм вида $a_1b_1 + \dots + a_mb_m$, где $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in I$, $b_i \in J$.

[3] Верные утверждение докажите, к неверным приведите явные контрпримеры.

[4] ПОДСКАЗКА: пусть $a \in \mathcal{O}_{\sqrt{-d}}$ — необратимый элемент наименьшей *приведённой* высоты; покажите, что любое $b \in \mathcal{O}_{\sqrt{-d}}$ сравнимо с 0, 1 или −1 по модулю (a).

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (5.11.2024)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
4			
5а			
б			
6			
7			
8			
9а			
б			
10а			
б			
11			
12			
13а			
б			
в			
г			