

Конечно порождённые абелевы группы

АЛ6♦1. Пусть конечно порождённые модули A, B, C над областью главных идеалов таковы, что $A \oplus C \simeq B \oplus C$. Покажите, что $A \simeq B$.

АЛ6♦2. Абелева группа A называется *разложимой*, если $A = B \oplus C$ для некоторых ненулевых собственных подгрупп $0 \neq B, C \subsetneq A$. Докажите, что каждая конечно порождённая абелева группа является прямой суммой неразложимых и перечислите все неразложимые группы.

АЛ6♦3. Абелева группа A называется *простой*, если в ней нет ненулевых собственных подгрупп. Перечислите все конечно порождённые простые абелевы группы.

АЛ6♦4. Абелева группа A называется *полупростой*, если для любой подгруппы $B \subset A$ существует такая подгруппа $C \subset A$, что $A \simeq B \oplus C$. Докажите, что

- а) конечно порождённая абелева группа полупроста если и только если она является конечной прямой суммой простых
- б) любая подгруппа конечно порождённой полупростой группы полупроста.

АЛ6♦5*. Решите предыдущую задачу безо всяких предположений о конечности.

АЛ6♦6. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие того, что абелева группа $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/(p_1^{m_1}) \times \dots \times \mathbb{Z}/(p_k^{m_k})$, где все p_i — простые, является циклической.

АЛ6♦7. Пусть $n = 2^\mu p_1^{v_1} \dots p_m^{v_m}$, где все $p_i > 2$ простые и попарно различны. Докажите, что:

- а) $(\mathbb{Z}/(n))^\times = (\mathbb{Z}/(2^\mu))^\times \times (\mathbb{Z}/(p_1^{v_1}))^\times \times \dots \times (\mathbb{Z}/(p_m^{v_m}))^\times$
- б*) все группы $(\mathbb{Z}/(p_i^{v_i}))^\times$ циклические порядка $p_i^{v_i} - p_i^{v_i-1}$
- в*) $(\mathbb{Z}/(4))^\times \simeq \mathbb{Z}/(2)$ и $(\mathbb{Z}/(2^\mu))^\times \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2^{\mu-2})$ при $\mu > 2$.

АЛ6♦8. Верно ли, что для любого натурального m , делящего порядок конечной абелевой группы, в этой группе найдётся подгруппа порядка m ?

АЛ6♦9*. Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ число элементов порядка m в двух конечных абелевых группах A и B одинаково. Обязательно ли $A \simeq B$?

АЛ6♦10. Для каждого \mathbb{Z} -модуля M положим $M^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$.

- а) Приведите пример ненулевого \mathbb{Z} -модуля M с $M^* = 0$.
- б) Для каждого гомоморфизма $\varphi : M \rightarrow N$ постройте гомоморфизм $\varphi^* : N^* \rightarrow M^*$. Верно ли, что: (1) если φ сюръективен, то φ^* инъективен? (2) если φ инъективен, то φ^* сюръективен?
- в*) Пусть конечно порождённый \mathbb{Z} -модуль N свободен, и его подмодуль $L \subset N$ таков, что фактор N/L конечен. Покажите, что L^* свободен и конечно порождён, $N^* \subset L^*$ является его подмодулем, а фактор L^*/N^* конечен, и имеются канонические изоморфизмы:

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N/L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}) \mid \varphi(L) \subset \mathbb{Z}\} / N^* \simeq L^* / N^* .$$

АЛ6♦11 (формула Пика для параллелепипедов). Пусть $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ — три линейно независимых над \mathbb{R} целых вектора, $L \subset \mathbb{Z}^3$ — порождённый ими \mathbb{Z} -подмодуль, а $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — натянутый на эти векторы параллелепипед. Покажите, что объём Π равен числу элементов в фактор модуле \mathbb{Z}^3/L и равен $v + f/2 + e/4 + 1$, где v, f и e суть количества целых точек, находящихся, соответственно, строго внутри Π , строго внутри его граней и строго внутри рёбер. Обобщите этот результат на произвольную размерность.