ПРОГРАММА ВТОРОГО СЕМЕСТРА

ГОДОВОГО КУРСА «АЛГЕБРА – I»

интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 1,5 пары упражнений в неделю
темы, набранные *курсивом* могут стать необязательными или упраздниться вовсе

ТРЕТЬЯ ЧЕТВЕРТЬ (12 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Строение конечно порождённых модулей над областью главных идеалов: теорема о взаимных базисах свободного модуля и его подмодуля, инвариантные множители и элементарные делители, разложение модуля в сумму неразложимых циклических подмодулей, независимость инвариантных множителей от выбора взаимных базисов.

НЕДЕЛЯ 2. Жорданово и фробениусово описание конечно порождённых абелевых групп. Минимальное число образующих, циклические группы. Простые и полупростые группы. Подрешётки в $\mathbb{Z}^n$. Группы, заданные образующими и соотношениями.

НЕДЕЛЯ 3. Грассмановы многочлены и определители, замена переменных в грассмановом многочлене и миноры, разложение определителя по набору строк/столбцов (формулы Лапласа), *определитель пучка матриц*, присоединённая матрица. Матрицы над кольцом многочленов = многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, тождество Гамильтона – Кэли.

НЕДЕЛЯ 4. Приложения определителей: обращение матриц, выражение инвариантных множителей матрицы через её миноры, число элементов в факторе решётки по подрешётке равно объёму фундаментального параллелепипеда, *дискриминант, результант и исключение переменных*.

НЕДЕЛЯ 5. Классификация конечномерных пространств с оператором над произвольным полем. Отыскание элементарных делителей и минимального многочлена. Жорданова и фробениусова нормальные формы. Нильпотентные, полупростые, циклические и диагонализуемые операторы.

НЕДЕЛЯ 6. Свойства коммутирующих операторов. Корневое разложение над алгебраически замкнутым полем и вычисление функций от операторов.

КОНТРОЛЬНАЯ № 4: абелевы группы, определители и линейные операторы.

НЕДЕЛЯ 7. Определение группы. Группы преобразований. Циклические подгруппы и порядки элементов. Рабочий пример: симметрическая группа S_n — цикловой тип, длина и знак перестановки, сопряжение, централизатор перестановки данного циклового типа. Гомоморфизмы групп, непустые слои гомоморфизма являются смежными классами ядра.

НЕДЕЛЯ 8. Действие группы на множестве: транспортёры, стабилизаторы, сопряжение, формулы для длины орбиты и числа орбит. Группы фигур, нормализаторы и централизаторы. *Линейные, аффинные и проективные группы над конечными полями.* Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов между небольшими группами.

НЕДЕЛЯ 9. Действие группы на себе: классы смежности и сопряжённости, центр, реализация абстрактной группы группой преобразований. Нормальные подгруппы и фактор группы. Коммутаторы и коммутант.

НЕДЕЛЯ 10. Простые группы, простота знакопеременных групп A_n с $n \geqslant 5$, другие примеры простых групп. *Композиционные ряды. Теорема Жордана – Гёльдера.*

НЕДЕЛЯ 11. Прямые и полупрямые произведения групп, примеры. p-группы и теоремы Силова, примеры: строение небольших групп.

НЕДЕЛЯ 12. Свободные группы. Задание групп образующими и соотношениями. Образующие и соотношения диэдральных групп, *групп платоновых тел и симметрической группы.*

В СЕССИЮ ПОСЛЕ 3-ГО МОДУЛЯ. **Устный коллоквиум по материалу первых трёх четвертей:** группы, коммутативные кольца и поля, модули, алгебра матриц, определители, грассмановы многочлены и миноры, модули над кольцами главных идеалов, классификация конечно порождённых абелевых групп и конечномерных векторных пространств с оператором.

КОНТРОЛЬНАЯ № 5: конечные группы.

ЧЕТВЁРТАЯ ЧЕТВЕРТЬ (11 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Тензорное произведение модулей над кольцом. Полилинейные отображения модулей. Базис тензорного произведения свободных модулей. Канонические изоморфизмы коммутативности, ассоциативности и дистрибудивности. Тензорные произведения абелевых групп.

НЕДЕЛЯ 2. Тензорное произведение линейных отображений. *Образующие и соотношения тензорного произведения модулей, заданных образующими и соотношениями.* Тензорные произведения векторных пространств, линейные операторы и полилинейные формы на векторных пространствах как тензоры.

НЕДЕЛЯ 3. Тензорная алгебра векторного пространства. Свёртки. *Линейный носитель тензора и многообразия Сегре.*

НЕДЕЛЯ 4. Симметрическая алгебра векторного пространства. Поляризация многочленов и частные производные. *Касательные и поляры проективных гиперповерхностей. Многочлены с одномерным линейным носителем и многообразия Веронезе.*

НЕДЕЛЯ 5. Внешняя алгебра векторного пространства. Поляризация грассмановых многочленов и грассмановы частные производные. *Грассмановы многочлены с минимальным линейным носителем, соотношения Плюккера и грассманианы.*

НЕДЕЛЯ 6. Комплексификация и овеществление пространств и операторов. Сравнение вещественной и комплексной линейности, соотношения Коши – Римана. Вещественная геометрия комплексных собственных и корневых подпространств. Билинейные и полуторалинейные продолжения билинейных форм на комплексификацию. Эрмитово продолжение евклидовой структуры.

НЕДЕЛЯ 7. Эрмитова геометрия: длина вектора, эрмитова структура однозначно восстанавливается по функции длины, неравенства КБШ и треугольника, матрицы Грама и ортогонализация Грама – Шмидта, эрмитов угол между комплексными прямыми. Унитарная группа.

НЕДЕЛЯ 8. Эрмитово сопряжение линейных отображений. Ортогональная диагонализация нормальных операторов. Нормальные формы унитарных и (анти) самосопряжённых операторов. *SVD разложение линейного отображения между эрмитовыми пространствами*, полярное разложение обратимого оператора. Евклидово сопряжение, нормальные формы евклидово (анти) самосопряжённых и ортогональных операторов.

КОНТРОЛЬНАЯ № 6: тензоры, линейные операторы на эрмитовых пространствах.

НЕДЕЛЯ 9. *Комплексные и вещественные структуры. Кэлеровы тройки, описание кэлеровых троек, продолжающих заданную симплектическую или заданную евклидову структуру до эрмитовой. Зигелево полупространство и соотношения Римана.*

НЕДЕЛЯ 10. Тело $\mathbb{H}$, норма, сопряжение, чисто мнимые кватернионы. Действие сопряжением, универсальные накрытия $S^3 \simeq \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(4)$. *Бинарные группы платоновых тел, приложение кватернионов к геометрии четырёхмерных правильных многогранников. Два семейства эрмитовых структур на $\mathbb{H}$, спиноры и расслоение Хопфа $S^3 \twoheadrightarrow S^2$.*

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ЗА 2-Й СЕМЕСТР.