Определители

АС8◇1. Для произвольных квадратных матриц A и B выразите через $\det A$ и $\det B$

а) $\det\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ **б)** $\det\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & * \end{pmatrix}$.

АС8◇2. Как меняется определитель при отражении относительно побочной диагонали?

АС8◇3. Сколько $n \times n$ матриц определителя 1 имеется над полем из q элементов?

АС8◇4. Не прибегая к методу Гаусса вычислите

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -8 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ -3 & 10 & -13 \end{pmatrix}^{-1}$.

АС8◇5. Вычислите определитель матрицы с 1 на главной диагонали и 2 в остальных местах.

АС8◇6*. Для многочленов $f(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ и $g(x) = b_m \prod_{j=1}^{m}(x - \beta_j)$ произведения $R(f,g) \overset{\text{def}}{=} a_n^m b_m^n \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j)$ и $D(f) \overset{\text{def}}{=} a_n^{2n-2} \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$ называются соответственно *результантом* этих многочленов и *дискриминантом* многочлена f. Выразите:

а) $D(f)$ через $R(f, f')$ **б)** $D(fg)$ через $D(f)$, $D(g)$ и $R(f,g)$.

АС8◇7. Исключите x из систем уравнений: **а)** $5x^2-6xy+5y^2-16 = 2x^2-xy+y^2-x-y-4 = 0$

б) $4x^2 - 7xy + y^2 + 13x - 2y - 3 = 9x^2 - 14xy + y^2 + 28x - 4y - 5 = 0$.

АС8◇8. Как связаны дискриминант приведённого многочлена $\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ и $\det(\alpha_j^{n-i})$?

АС8◇9*. Вычислите дискриминанты многочленов: **а)** $\sum_{k=0}^{n} x^k$ **б)** $\sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ **в)** $x^n + a$.

АС8◇10 (циркулянт). Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, через значения полинома $f(x) = \alpha_0 x^n + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ на корнях $\sqrt[n+1]{1} \in \mathbb{C}$.

АС8◇11. Пусть $AB = E$. Докажите соотношение $a_{IJ} = (-1)^{|I|+|J|} b_{\overline{J}\overline{I}} \det A$ на дополнительные миноры матриц A и B.

АС8◇12. Вычислите все частные производные $\dfrac{\partial^k \det(A)}{\partial a_{i_1 j_1} \partial a_{i_2 j_2} \dots \partial a_{i_k j_k}}$. Если общий случай вызывает затруднения, начните с $k = 1, 2$.

АС8◇13. НОД 2×2 миноров целочисленной 3×3 матрицы равен 12. Может ли её определитель быть равен **а)** 28 **б)** 36? Может ли НОД элементов этой матрицы быть равен **в)** 1 **г)** 2 **д)** 3 **е)** 4 **ж)** 5 **з)** 6? Если да — приведите пример, нет — объясните, почему.

АС8◇14. Не прибегая к методу Гаусса вычислите инвариантные множители матриц

а) $\begin{pmatrix} 15 & -6 & 3 \\ -15 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 17 & -5 & -37 \\ -21 & 0 & 21 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -3 & 24 & -27 & 9 \\ 9 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

АС8◇15. Сколько элементов в факторе $\mathbb{Z}^4/L$, где $L \subset \mathbb{Z}^4$ порождается столбцами матрицы

а) $\begin{pmatrix} -6 & 8 & 0 & -7 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 7 & -6 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

АС8◇16. Существует ли комплексная 2×4 матрица с множеством 2×2 миноров

а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **б)** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.