

Задачи для подготовки к контрольной № 2

ПК2♦1. Разложите в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{Q}$ рациональные функции:

а) $\frac{x^3 - x^2 + 6x + 4}{x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36}$ б) $\frac{x^3 - 9x^2 - 6x + 6}{x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81}$.

ОТВЕТ: в (а) $\frac{19}{25} - \frac{x+3}{2} + \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{x-2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5}$; в (б) $\frac{1}{3} - \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{9}$.

ПК2♦2. Найдите коэффициент при x^k у следующих рядов из $\mathbb{Q}[[x]]$:

а) $\frac{-8x^2 - 5x + 1}{x^3 - 10x^2 + 32x - 32}$ б) $\frac{-8x^2 + 3x + 7}{x^3 - x^2 - x + 1}$ в) $\frac{x^2 - 4x + 2}{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}$.

ОТВЕТ: в (а) разложение на простейшие дроби: $-\frac{1}{4} - \frac{x+1}{7} + \frac{(x-1)^2}{32}$; в (б) разложение на простейшие дроби: $-\frac{1}{7} + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{7}$; в (в) разложение на простейшие дроби: $-\frac{3}{4} + \frac{x+4}{25} + \frac{(x+1)^2}{9}$.

ПК2♦3. Явно выразите a_k через k для следующих последовательностей:

- а) $a_0 = 8, a_1 = 81, a_2 = 529, a_k = 9a_{k-1} - 24a_{k-2} + 20a_{k-3}$ при $k \geq 3$
 б) $a_0 = -9, a_1 = 55, a_2 = -289, a_k = -7a_{k-1} - 11a_{k-2} - 5a_{k-3}$ при $k \geq 3$
 в) $a_0 = 2, a_1 = -19, a_2 = 105, a_k = -7a_{k-1} - 11a_{k-2} - 5a_{k-3}$ при $k \geq 3$.

ОТВЕТ: в (а) $a_k = -7 \cdot 2^k k - \frac{3}{55 \cdot 2^k} + \frac{3}{79 \cdot 5^k}$, хар. многочлен: $t^3 - 9t^2 + 24t - 20 = (t-5)(t-2)^2$, производящая функция: $\frac{-8x^2 + 9x + 8}{-20x^3 + 24x^2 - 9x + 1} = \frac{79}{79} + \frac{3 \cdot (5x-1)}{3 \cdot (2x-1)} + \frac{3 \cdot (2x-1)}{7}$; в (б) $a_k = \frac{4}{(-1)^k} \cdot \frac{(-47 \cdot 5^k + 4k + 11)}{4}$, хар. многочлен: $t^3 + 7t^2 + 11t + 5 = (t+1)^2(t+5)$, производящая функция: $\frac{-3x^2 - 8x - 9}{5x^3 + 11x^2 + 7x + 1} = -\frac{47}{7} + \frac{4 \cdot (5x+1)}{4 \cdot (x+1)} + \frac{4}{7}$; в (в) $a_k = \frac{16}{69} - \frac{(x+1)^2}{16(5x+1)} - \frac{(x+1)^2}{33}$, хар. многочлен: $t^3 + 7t^2 + 11t + 5 = (t+1)^2(t+5)$, производящая функция: $\frac{-6x^2 - 5x + 2}{5x^3 + 11x^2 + 7x + 1} = \frac{16}{69} - \frac{(x+1)^2}{16(5x+1)} - \frac{(x+1)^2}{33}$.

ПК2♦4. Для всех $0 \leq k \leq 3$ вычислите коэффициенты при x^k у степенных рядов

а) $\ln(-3x^2 + 3x + 1)/\sqrt[3]{-x^2 - 4x + 1}$ б) $\sin(4x^2 - 4x)/\sqrt{4x^2 + 2x + 1}$.

ОТВЕТ: в (а) $\ln(-3x^2 + 3x + 1) = 3x - \frac{15x^2}{2} + 18x^3 + O(x^4)$; $\sqrt[3]{-x^2 - 4x + 1} = 1 - \frac{4x}{3} + \frac{4x^2}{3} + \frac{3}{32x^3} + O(x^4)$; в (б) $\sin(4x^2 - 4x) = -4x + 4x^2 + \frac{3}{32x^3} + O(x^4)$; $\sqrt{4x^2 + 2x + 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + O(x^4)$.

ПК2♦5. Запишите в виде несократимых дробей p/q с $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ степенные ряды

а) $\sum_{n \geq 0} (-5n^3 - 28n^2 - 53n - 34) \cdot x^n$ б) $\sum_{n \geq 0} (5n^3 + 35n^2 + 71n + 44) \cdot x^n$.

ОТВЕТ: в (а) $-\frac{1}{4} - \frac{(1-x)^2}{4} + \frac{(1-x)^3}{4} = \frac{x^4 - 16x^3 + 16x^2 - 4x + 1}{30}$, коэффициент при x^k равен $\frac{x^4 - 16x^3 + 16x^2 - 4x + 1}{30}$; в (б) $\frac{1}{3} + \frac{(1-x)^2}{10} + \frac{(1-x)^3}{30} = \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{30}$, коэффициент при x^k равен $\frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{30}$.

ПК2♦6. Выясните, приводимы ли в $\mathbb{Z}[x]$ многочлены

а) $x^4 - 5x^2 + 4x - 5$ б) $x^4 - x^2 + 6x - 9$ в) $x^4 + 5x^2 + 5x + 5$,

и если да, то разложите их на неприводимые множители.

ОТВЕТ: в (а) неприводим, т.к. неприводим над $\mathbb{F}_3$ (не делится на $x^2 + 1, x^2 + x - 1$ и $x^2 - x - 1$); в (б) приводим: $(x^2 + x - 3)(x^2 - x + 3)$, над $\mathbb{F}_3$ раскладывается как $x^2(x-1)(x+1)$; в (в) неприводим, над $\mathbb{F}_3$ раскладывается как $x^2(x^2 + 1)^2$.