Задачи для подготовки к контрольной № 4

ПК4◇1. Обозначим через $g(A)$ минимальное количество элементов, порождающих абелеву группу A. Найдите $\max g(A)$ по всем абелевым группам A порядка
а) 14700 **б)** 63000 **в)** 2222640,
укажите, на скольких группах он достигается, и приведите пример такой группы.

ответ: в (а) $g = 2$ у 7 групп порядка $2^2 3^1 5^2 7^2$, в (б) $g = 3$ у 10 групп порядка $2^3 3^2 5^3 7^1$, в (в) $g = 4$ у 27 групп порядка $2^4 3^4 5^1 7^3$.

ПК4◇2. Сколько элементов в абелевой группе с образующими a_1, a_2, a_3, a_4, все линейные соотношения между которыми вытекают из соотношений

а) $$\begin{gathered} -a_1 + 2a_3 = 0 \\ -3a_1 + 10a_3 - 2a_4 = 0 \\ 9a_1 + 9a_2 - a_3 - 5a_4 = 0 \\ -7a_1 + 8a_3 + 5a_4 = 0 \end{gathered}$$ **б)** $$\begin{gathered} 4a_1 + 3a_3 - 5a_4 = 0 \\ 2a_1 - 9a_2 - 10a_3 + 3a_4 = 0 \\ -4a_1 + 9a_2 + 3a_4 = 0 \\ 8a_1 - 4a_2 - 10a_3 = 0 \end{gathered}$$ **в)** $$\begin{gathered} -9a_1 - 7a_3 + 5a_4 = 0 \\ -7a_1 + a_2 - 9a_3 = 0 \\ -10a_1 - 4a_2 + 4a_4 = 0 \\ 6a_1 + 3a_2 - 2a_3 - 8a_4 = 0\,? \end{gathered}$$

ответ: в (а) 72, в (б) 940, в (в) 210.

ПК4◇3. Найдите **а)** $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -5 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 5 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

ответ: в (а) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, в (б) $\begin{pmatrix} \frac{17}{140} & \frac{1}{70} & -\frac{1}{14} \\ \frac{19}{140} & -\frac{3}{70} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$, в (в) $\begin{pmatrix} \frac{5}{33} & \frac{5}{33} & -\frac{4}{33} \\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{22} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{6}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{7}{11} \end{pmatrix}$.

ПК4◇4. Выясните, сопряжена ли в $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$

а) матрица $\begin{pmatrix} -9 & 6 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ -16 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ матрицам (1) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

б) матрица $\begin{pmatrix} -11 & 6 & 1 \\ -24 & 13 & 2 \\ -23 & 11 & 3 \end{pmatrix}$ матрицам (1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -7 & 9 & 7 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 9 & 10 & 8 \\ -13 & -12 & -10 \end{pmatrix}$

в) матрица $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -5 & 2 & -5 \\ -7 & 7 & -10 \end{pmatrix}$ матрицам (1) $\begin{pmatrix} -6 & -1 & 1 \\ 9 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 26 & -8 & -5 \\ 19 & -4 & -7 \end{pmatrix}$.

ответ: (а) в (1) — да, в (2) — нет; ЖНФ исходной матрицы и матрицы из (1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, а матрицы из (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, хар. многочлен всех трёх матриц $t^3 + 5t^2 + 7t + 3 = (t+1)^2(t+3)$

(б) в (2) — да, в (1) — нет; ЖНФ исходной матрицы и матрицы из (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а матрицы из (1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, хар. многочлен всех трёх матриц $t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-2)^2(t-1)$

(в) в (1) — да, в (2) — нет; ЖНФ исходной матрицы и матрицы из (1) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, а матрицы из (2) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, хар. многочлен всех трёх матриц $t^3 + 8t^2 + 21t + 18 = (t+2)(t+3)^2$.

ПК4◇5 (10 баллов). Над полем $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5)$ найдите ЖНФ и ФНФ матриц:

а) $\begin{pmatrix}0&1&4&2\\4&3&3&2\\3&4&4&4\\4&1&4&0\end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix}4&4&4&2\\4&3&2&1\\2&4&4&1\\3&2&0&3\end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix}1&2&1&1\\3&3&3&2\\2&0&4&1\\4&1&1&1\end{pmatrix}$.

ответ: в (а) ЖНФ: $\begin{pmatrix}-4&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&-4&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$, ФНФ: $\begin{pmatrix}-8&1&0&0\\-18&0&1&0\\-8&0&0&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$, хар. многочлен: $x^4+8x^3+18x^2+8x+1=(x^2-x+1)^2$;

в (б) ЖНФ: $\begin{pmatrix}-3&1&0&0\\-3&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, ФНФ: $\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\2&0&1&0\\3&0&0&1\\-3&0&0&0\end{pmatrix}$, хар. многочлен $x^4+x^3-2x^2-3x+3=(x-1)^2(x^2-2x-2)$;

в (в) ЖНФ: $\begin{pmatrix}-3&1&0&0\\-4&0&0&0\\0&0&-3&1\\0&0&-4&0\end{pmatrix}$, ФНФ: $\begin{pmatrix}-3&1&0&0\\-4&0&0&0\\0&0&-3&1\\0&0&-4&0\end{pmatrix}$, хар. многочлен $x^4+6x^3+17x^2+24x+16=(x^2-2x-1)^2$.

ПК4◇6. Существует ли такая вещественная 3×3-матрица A, что:

а) $A^6=\begin{pmatrix}7&-4&1\\9&-6&1\\-5&4&1\end{pmatrix}$ **б)** $A^4=\begin{pmatrix}-2&4&-4\\1&-23&21\\1&-25&23\end{pmatrix}$ **в)** $A^6=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&0&-1\\3&3&2\end{pmatrix}$ **г)** $A^5=\begin{pmatrix}0&6&-5\\-1&-4&2\\-1&-2&0\end{pmatrix}$?

Если да, приведите пример такой матрицы, если нет, объясните, почему.

ответ: в (а) нет, поскольку $\det\begin{pmatrix}7&-4&1\\9&-6&1\\-5&4&1\end{pmatrix}=-8<0$;

в (б) нет, поскольку будучи перестановочным с A^4, оператор A переводит в себя одномерное собственное подпространство V_{-2} оператора A^4. Хар. многочлен: $t^3+2t^2-4t-8=(t-2)(t+2)^2$, ЖНФ: $\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$;

в (в) да, $A=\begin{pmatrix}2-\frac{3\sqrt[6]{2}}{4}&-1+\sqrt[6]{2}&-1+\frac{11\sqrt[6]{2}}{12}\\-4+\frac{15\sqrt[6]{2}}{4}&2-\sqrt[6]{2}&2-\frac{23\sqrt[6]{2}}{12}\\6-\frac{21\sqrt[6]{2}}{4}&-3+3\sqrt[6]{2}&-3+\frac{15\sqrt[6]{2}}{4}\end{pmatrix}$, хар. мн-н: $t^3-5t^2+8t-4=(t-2)^2(t-1)$, интерпол. мн-н: $t^2(1-\frac{11\sqrt[6]{2}}{12})+t(-4+\frac{15\sqrt[6]{2}}{4})-\frac{17\sqrt[6]{2}}{6}+4$ квадрат матрицы: $\begin{pmatrix}10&3&-1\\0&-2&-2\\18&9&1\end{pmatrix}$

в (г) да, $A=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}&2\sqrt[5]{2}-\frac{6}{5}&\frac{7}{5}-2\sqrt[5]{2}\\-\frac{1}{5}&\sqrt[5]{2}-\frac{14}{5}&\frac{8}{5}-\sqrt[5]{2}\\-\frac{1}{5}&2\sqrt[5]{2}-\frac{14}{5}&\frac{8}{5}-2\sqrt[5]{2}\end{pmatrix}$, хар. мн-н: $t^3+4t^2+5t+2=(t+1)^2(t+2)$, интерпол. мн-н: $t^2(\frac{6}{5}-\sqrt[5]{2})+t(\frac{13}{5}-2\sqrt[5]{2})+\frac{2}{5}-\sqrt[5]{2}$ квадрат матрицы: $\begin{pmatrix}-1&-14&12\\2&6&-3\\2&2&1\end{pmatrix}$.

ПК4◇7. Вычислите $\begin{pmatrix}-21&8&4\\-19&7&4\\-72&28&13\end{pmatrix}^{2021}$.

ответ: хар. мн-н $t^3+t^2-t-1=(t-1)(t+1)^2$, интерпол. мн-н $-1010t^2+t+1010$, ответ

$$-1010\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-22&9&4\\44&-16&-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-21&8&4\\-19&7&4\\-72&28&13\end{pmatrix}+1010\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21&8&4\\22201&-8073&-4036\\-44512&16188&8093\end{pmatrix}$$

ПК4◇8. Над полем $\mathbb{F}_5$ вычислите: **а)** $\begin{pmatrix}-1&2&2\\1&2&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}^{3073}$ **б)** $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}^{3002}$ **в)** $\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}^{3294}$.

ОТВЕТ: над $\mathbb{F}_5$ в (а) хар. мн-н $t^3 + 2t + 2 = (t-1)^2(t+2)$, интерпол. мн-н $2 - t^2$, ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; в (б) хар. мн-н $t^3 + t^2 - 2 = (t-2)(t-1)^2$, интерпол. мн-н t^2, ответ: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в (в) хар. мн-н $t^3 + 2t - 2 = (t-2)(t+1)^2$, интерпол. мн-н $t + 2$, ответ: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.