

Задачи для подготовки к контрольной № 5

ПК5♦1. Найдите порядок и чётность перестановки

- а) $(1, 12, 8, 11, 10, 5, 4, 9, 2, 6, 7, 3) \in S_{12}$
- б) $(2, 1, 9, 8, 10, 4, 7, 5, 3, 6) \in S_{10}$
- в) $(4, 3, 7, 2, 6, 13, 10, 11, 5, 1, 8, 12, 9) \in S_{13}$.

ОТВЕТ: в (а) разложение на циклы: $|2, 12, 3, 8, 9|4, 11, 7|5, 10, 6|$, чётная перестановка порядка 15.
 в (б) разложение на циклы: $|1, 2|3, 9|4, 8, 5, 10, 6|$, чётная перестановка порядка 10
 в (в) разложение на циклы: $|1, 4, 2, 3, 7, 10|5, 6, 13, 9|8, 11|$, нечётная перестановка порядка 12.

ПК5♦2. Сколько перестановок

- а) не меняется при сопряжении перестановкой $(5, 6, 9, 2, 7, 4, 1, 3, 8)$ в S_9
- б) сопряжено перестановке $(1, 8, 3, 6, 7, 4, 5, 2)$ в S_8
- в) коммутирует с перестановкой $(2, 8, 10, 6, 4, 1, 5, 7, 11, 3, 9)$ в S_{11}
- г) не меняется при сопряжении перестановкой $(9, 4, 3, 2, 8, 7, 6, 5, 1, 10)$ в A_{10}
- д) сопряжено перестановке $(11, 3, 6, 7, 9, 2, 5, 4, 1, 10, 8)$ в A_{11} ?

ОТВЕТ: в (а) разложение на циклы: $|1, 5, 7|2, 6, 4|3, 9, 8|$, ответ: 162
 в (б) разложение на циклы: $|2, 8|4, 6|5, 7|$, ответ: 420
 в (в) разложение на циклы: $|1, 2, 8, 7, 5, 4, 6|3, 10|9, 11|$, ответ 56
 в (г) разложение на циклы: $|1, 9|2, 4|5, 8|6, 7|$, класс сопряжённости в A_{10} не расширяется, ответ: 384
 в (д) разложение на циклы: $|1, 11, 8, 4, 7, 5, 9|2, 3, 6|$, класс сопряжённости в A_{11} расширяется, ответ: 950400.

ПК5♦3. Сколько в S_9 перестановок порядка **а) 3 б) 12 в) 14?**

ОТВЕТ: в (а) типа $[3, 3, 3]$: 2240, типа $[3, 3, 1, 1, 1]$: 3360, типа $[3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$: 168, итого: 5768
 в (б) типа $[4, 3, 1, 1]$: 15120, типа $[4, 3, 1, 1]$: 15120, итого: 30240
 в (в) типа $[7, 2]$: 25920, итого: 25920.

ПК5♦4. Сколько орбит имеет оператор

- а) $Ad_g : S_5 \rightarrow S_5$ сопряжения перестановкой $g = (4, 3, 1, 2, 5)$
- б) $Ad_g : S_7 \rightarrow S_7$ сопряжения перестановкой $g = (6, 2, 3, 7, 1, 4, 5)$
- в) $Ad_g : S_{10} \rightarrow S_{10}$ сопряжения перестановкой $g = (8, 10, 7, 1, 4, 6, 2, 9, 5, 3)$?

ОТВЕТ: в (а) $|X^g| = 120$, итого: 34 в (б) 4 элемента имеют $|X^g| = 10$, $|X^{g^2}| = 5040$, итого: 1016
 в (в) 8 элементов типа $[5, 4, 1]$ имеют $|X^g| = 20$, 4 элемента типа $[5, 2^2, 1]$ имеют $|X^g| = 40$, 4 элемента типа $[5, 1^5]$ имеют $|X^g| = 600$, 2 элемента типа $[4, 1^6]$ имеют $|X^g| = 2880$, 1 элемент типа $[2^2, 1^6]$ имеет $|X^g| = 5760$, $|X^{g^2}| = 3628800$, итого: 182152.

ПК5♦5. Что за подгруппу порождают в S_5 перестановки $(3, 4, 1, 2, 5)$ и $(3, 2, 4, 1, 5)$? Сколько в ней элементов? Каковы её композиционные факторы? Какой из известных Вам групп она изоморфна?

ОТВЕТ: Собственная группа A_4 с вершинами $(2, 3, 4, 1)$, заданная на 180 градусах.

ПК5♦6. Что за подгруппу порождают в S_5 перестановки $(2, 1, 5, 4, 3)$ и $(5, 1, 2, 4, 3)$? Сколько в ней элементов? Каковы её композиционные факторы? Какой из известных Вам групп она изоморфна?

ОТВЕТ: Группа диэдра D_4 , заданная отражением относительно перпендикуляра к стороне и поворотом.

ПК5♦7. Предъявите три попарно не изоморфные группы порядка **а) 60 б) 42 в) 2485** и укажите их композиционные ряды и факторы Жордана–Гельдера.

ОТВЕТ: например, в (а) A_5 (простая), $\mathbb{Z}/(2) \times D_{15} \triangleleft \mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(5) \triangleleft \mathbb{Z}/(15) \triangleleft \mathbb{Z}/(3)$ (абелева); в (б) $\mathbb{Z}/(3) \times D_{14} \triangleleft \mathbb{Z}/(7) \times D_6 \triangleleft D_6 \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(7) \triangleleft \mathbb{Z}/(21) \triangleleft \mathbb{Z}/(7)$ (надо объяснить, почему группы не изоморфны); в (в) $2485 = 5 \cdot 7 \cdot 71$, и кроме абелевой бывают, к примеру, $\mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(71) \rtimes \mathbb{Z}/(7)$, где $\psi^{71}: [x]^{71} \mapsto [ax]^{71}$ и $2485 \in \{32, 37, 45, 48, 20, 30\}$, и $\mathbb{Z}/(7) \times \mathbb{Z}/(71) \rtimes \mathbb{Z}/(5)$, где $\psi^{15}: [x]^{15} \mapsto [ax]^{15}$ и возможные $a \in \{57, 5, 54, 25\}$ (ещё надо объяснить, почему эти группы не изоморфны, и выписать их факторы Жордана–Гельдера).