

Задачи для подготовки к контрольной № 6

ПК6♦1. Найдите ЖНФ линейного оператора $f \otimes g : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$, если

- $f : V \rightarrow V$ имеет две двумерные клетки с собственными числами 1 и 2, а $g : V \rightarrow V$ — две двумерные клетки с собственными числами 3 и 4
- $f : V \rightarrow V$ имеет две двумерные клетки с собственными числами 4 и 6, а $g : V \rightarrow V$ — две двумерные клетки с собственными числами 6 и 9
- $f : V \rightarrow V$ имеет две двумерные клетки с собственными числами 0 и 1, а $g : V \rightarrow V$ — две двумерные клетки с собственными числами 2 и 3.

с собственными числами 2 и 3, а так же 4 и 6. Ответ: (а) в (а) по одной и той же клетке с собственными числами 2 и 3, а так же 4 и 6. Ответ: (б) в (б) по одной и той же клетке с собственными числами 4 и 6, а так же 6 и 9. Ответ: (в) в (в) по одной и той же клетке с собственными числами 0 и 1, а так же 2 и 3.

ПК6♦2. Векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы. Выясните, разложимы ли тензоры

- $18e_1 \otimes e_1 - 12e_2 \otimes e_1 + 12e_3 \otimes e_1 + 12e_1 \otimes e_2 - 8e_2 \otimes e_2 + 8e_3 \otimes e_2 + 12e_1 \otimes e_3 - 8e_2 \otimes e_3 + 8e_3 \otimes e_3$
- $-6e_1 \otimes e_1 + 4e_2 \otimes e_1 - 4e_3 \otimes e_1 - 2e_1 \otimes e_2 + 2e_2 \otimes e_2 - 4e_3 \otimes e_2 - e_1 \otimes e_3 - 6e_2 \otimes e_3 - 4e_3 \otimes e_3$
- $12e_1 \otimes e_1 - 30e_2 \otimes e_1 + 18e_3 \otimes e_1 + 12e_1 \otimes e_2 - 30e_2 \otimes e_2 + 18e_3 \otimes e_2 + 4e_1 \otimes e_3 - 10e_2 \otimes e_3 + 6e_3 \otimes e_3$

Если да — предъявите разложение явно, если нет — объясните, почему.

$$(2e_1 - 5e_2 + 3e_3) \otimes (6e_1 + 6e_2 + 2e_3).$$

Ответ: (а) разложим: $(6e_1 - 4e_2 + 4e_3) \otimes (3e_1 + 2e_2 + 2e_3)$, в (б) нет, так как $\text{rk} = 2$, в (в) разложим: $\begin{pmatrix} -4 & 9 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

ПК6♦3. Квадратичная форма $\det$ на векторном пространстве с базисом $e_1, \dots, e_4$ сопоставляет четырём векторам определитель матрицы их координат в этом базисе. Напишите матрицу Грама билинейной формы, полученной свёрткой

- 3-го и 2-го тензорных сомножителей формы $\det$ соответственно с 1-м и 2-м сомножителями тензора $(-5e_1 + 5e_4) \otimes (5e_2 + 2e_3) + (-4e_1 - 5e_3) \otimes (e_2 + e_4)$
- 2-го и 4-го тензорных сомножителей формы $\det$ соответственно с 1-м и 2-м сомножителями тензора $(e_3 - 4e_4) \otimes (-5e_1 + 2e_2) + (-e_1 - e_4) \otimes (-5e_2 - 3e_3)$
- 4-го и 2-го тензорных сомножителей формы $\det$ соответственно с 1-м и 2-м сомножителями тензора $(-2e_3 + 3e_4) \otimes (5e_1 - e_2) + (-5e_1 - 2e_3) \otimes (3e_2 - 4e_4)$.

Тензор $8x_2 \otimes x_1 - 3x_3 \otimes x_1 + 4x_4 \otimes x_1 - 8x_1 \otimes x_2 + 5x_3 \otimes x_2 - 10x_4 \otimes x_2 + 3x_1 \otimes x_3 - 5x_2 \otimes x_3 - 15x_4 \otimes x_3 - 4x_1 \otimes x_4 + 10x_2 \otimes x_4 + 15x_3 \otimes x_4$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & -15 & -10 & 4 \\ -3 & 5 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -5 & 3 \\ 15 & 0 & 10 & -4 \end{pmatrix}$.

в (в) $\det$ сворачивается с $-10e_3 \otimes e_1 + 15e_4 \otimes e_1 - 15e_1 \otimes e_2 - 4e_3 \otimes e_2 - 3e_4 \otimes e_2 + 20e_1 \otimes e_4 + 8e_3 \otimes e_4$, получается тензор $8x_2 \otimes x_1 - 3x_3 \otimes x_1 + 4x_4 \otimes x_1 - 8x_1 \otimes x_2 + 5x_3 \otimes x_2 - 10x_4 \otimes x_2 + 3x_1 \otimes x_3 - 5x_2 \otimes x_3 - 15x_4 \otimes x_3 - 4x_1 \otimes x_4 + 10x_2 \otimes x_4 + 15x_3 \otimes x_4$.

в (б) $\det$ сворачивается с $-5e_3 \otimes e_1 + 20e_4 \otimes e_1 + 5e_1 \otimes e_2 + 2e_3 \otimes e_2 - 3e_4 \otimes e_2 + 3e_1 \otimes e_3 + 3e_4 \otimes e_3$, получается тензор $-3x_2 \otimes x_1 - 3x_3 \otimes x_1 - 2x_4 \otimes x_1 + 3x_1 \otimes x_2 - 20x_3 \otimes x_2 - 8x_4 \otimes x_2 + 3x_1 \otimes x_3 + 20x_2 \otimes x_3 + 5x_4 \otimes x_3 + 2x_1 \otimes x_4 + 8x_2 \otimes x_4 - 5x_3 \otimes x_4$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} -2 & -8 & 5 & 0 \\ -3 & -20 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 20 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

в (а) $\det$ сворачивается с $-29e_1 \otimes e_2 - 5e_3 \otimes e_2 + 25e_4 \otimes e_2 - 10e_1 \otimes e_3 + 10e_4 \otimes e_3 - 4e_1 \otimes e_4 - 5e_3 \otimes e_4$, получается тензор $15x_2 \otimes x_1 - 25x_3 \otimes x_1 - 5x_4 \otimes x_1 - 15x_1 \otimes x_2 + 4x_3 \otimes x_2 - 10x_4 \otimes x_2 + 25x_1 \otimes x_3 - 4x_2 \otimes x_3 + 29x_4 \otimes x_3 + 5x_1 \otimes x_4 + 10x_2 \otimes x_4 - 29x_3 \otimes x_4$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} -5 & -10 & 29 & 0 \\ -25 & 4 & 0 & -29 \\ 15 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & -15 & 25 & 5 \end{pmatrix}$.

ПК6♦4 (10 баллов). Векторы $e_1, \dots, e_5$ линейно независимы. Выясните, разложима ли грасманова квадратичная форма

- $9e_1 \wedge e_2 - 8e_1 \wedge e_3 + 9e_1 \wedge e_4 + 2e_1 \wedge e_5 - 5e_2 \wedge e_3 + 4e_2 \wedge e_4 - 9e_2 \wedge e_5 - 5e_3 \wedge e_4 + 9e_3 \wedge e_5 + 6e_4 \wedge e_5$
- $-8e_1 \wedge e_2 + 12e_1 \wedge e_3 - 12e_1 \wedge e_4 - 16e_2 \wedge e_3 + 16e_2 \wedge e_4 + 8e_2 \wedge e_5 - 12e_3 \wedge e_5 + 12e_4 \wedge e_5$

$$\text{в)} -2e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge e_3 - 3e_1 \wedge e_4 + 3e_1 \wedge e_5 + 5e_2 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge e_4 - 4e_2 \wedge e_5 - 6e_3 \wedge e_4 - 6e_3 \wedge e_5 - 8e_4 \wedge e_5$$

$$\text{г)} 12e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge e_3 - 14e_1 \wedge e_5 + 21e_2 \wedge e_3 - 18e_2 \wedge e_4 - 3e_2 \wedge e_5 - 3e_3 \wedge e_4 + 24e_3 \wedge e_5 - 21e_4 \wedge e_5.$$

Если да — предъявите разложение явно, если нет — объясните, почему.

ОТВЕТ: (а) в $\mathbb{R}^3$ не существует векторов v, w таких, что $v \wedge w = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 - 4e_2 \wedge e_5 - 6e_3 \wedge e_4 - 6e_3 \wedge e_5 - 8e_4 \wedge e_5$.
(б) разложить можно: $e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 - 4e_2 \wedge e_5 - 6e_3 \wedge e_4 - 6e_3 \wedge e_5 - 8e_4 \wedge e_5 = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \wedge (e_2 + e_3 + e_4 + e_5)$.

ПК6♦5 (10 баллов). Найдите размерности линейных носителей многочленов

$$\text{а)} -8x_1^3 + 36x_1^2x_2 - 24x_1^2x_3 - 54x_1x_2^2 + 72x_1x_2x_3 - 24x_1x_3^2 + 27x_2^3 - 54x_2^2x_3 + 36x_2x_3^2 - 8x_3^3$$

$$\text{б)} 13x_1^3 - 66x_1^2x_2 + 46x_1^2x_3 + 66x_1x_2^2 - 44x_1x_2x_3 - 14x_1x_3^2 - 40x_2^3 + 88x_2^2x_3 - 88x_2x_3^2 + 40x_3^3$$

$$\text{в)} -16x_1^3 + 8x_1^2x_2 + 8x_1^2x_3 - 64x_1x_2x_3 + 28x_1x_3^2 - 12x_2^3 + 9x_2^2x_3 - x_2x_3^2 - 8x_3^3.$$

ОТВЕТ: (а) 1, (б) 2, (в) 3.

ПК6♦6. Выясните, нормален ли оператор, имеющий в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^2$ матрицу

$$\text{а)} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} + \frac{11i}{9} & \frac{8i}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} + \frac{7i}{9} \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} - \frac{13i}{9} & \frac{14}{9} + \frac{2i}{9} \\ \frac{10}{9} - \frac{10i}{9} & -\frac{1}{3} - \frac{14i}{9} \end{pmatrix} \quad \text{в)} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} - \frac{11i}{9} & \frac{1}{3} - \frac{4i}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{7i}{9} \end{pmatrix} \quad \text{г)} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2i}{3} & 2 + \frac{2i}{3} \\ -\frac{2}{3} - 2i & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

и если да, приведите его к нормальным осям.

ОТВЕТ: (а) и (в) операторы не нормальны (они не диагонализуются), (б) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 - 2i \\ -1 - 2i & 0 \end{pmatrix}$ оператор имеет матрицу $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix}$, (г) в базисе из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix}$ оператор имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 - 2i \\ -1 - 2i & 0 \end{pmatrix}$.

ПК6♦7. Найдите полярное разложение $F = SG$, где S самосопряжён и положителен, а $G \in U_2$, для оператора $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -46/27 - 8i/9 & 20/27 - 38i/27 \\ -40/27 - 37i/27 & -44/27 + 2i/9 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} -10/9 + 8i/9 & -22/9 - 2i/3 \\ 2 - 4i/9 & -5/9 - 2i/9 \end{pmatrix}.$$

где $F F^*$ имеет хар. многочлен $t^2 - (t - 9)(t - 4)$.

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} -1/3 + 2i/9 & -8/9 - 2i/9 \\ 8/9 - 2i/9 & -1/3 - 2i/9 \end{pmatrix}, & S^{-1} &= \begin{pmatrix} 19/54 & 1/27 + i/27 \\ 1/27 - i/27 & 13/27 \end{pmatrix}, \\ S &= \begin{pmatrix} 26/9 & -2/9 + 2i/9 \\ -2/9 - 2i/9 & 6/9 \end{pmatrix}, & F F^* &= \begin{pmatrix} 76/9 & -10/9 + 10i/9 \\ -10/9 + 10i/9 & 61/9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

где $F F^*$ имеет хар. многочлен $t^2 - (t - 9)(t - 4)$.

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} -2/3 - 2i/9 & 4/9 - 5i/9 \\ -4/9 - 5i/9 & -2/3 + 2i/9 \end{pmatrix}, & S^{-1} &= \begin{pmatrix} 23/54 & -2/27 - i/27 \\ -2/27 - i/27 & 11/27 \end{pmatrix}, \\ S &= \begin{pmatrix} 22/9 & 4/9 + 2i/9 \\ 4/9 + 2i/9 & 23/9 \end{pmatrix}, & F F^* &= \begin{pmatrix} 56/9 & 20/9 + 10i/9 \\ 20/9 + 10i/9 & 61/9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: (а)

ПК6♦8. Найдите полярное разложение $F = GS$, где $G \in U_2$, а S самосопряжён и положителен, для оператора $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -50/27 - 14i/27 & 2/3 - 16i/27 \\ -7/27 - 8i/9 & -70/27 + 26i/27 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1/27 - 2i/27 & 4/9 + 34i/27 \\ -20/27 + 2i & 35/27 + 38i/27 \end{pmatrix}.$$

