

## §8. Грассмановы многочлены и определители

### 8.1. Длина, знак и чётность перестановки. Биективные отображения

$$g : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad i \mapsto g_i,$$

называются *перестановками* *п* *элементов*. Перестановки образуют группу преобразований множества  $\{1, \dots, n\}$  в смысле **н° 0.6** на стр. 16. Эта группа обозначается  $S_n = \text{Aut}(\{1, \dots, n\})$  и называется *n-той симметрической группой*. Перестановку  $g \in S_n$  принято записывать словом

$$g = (g_1, \dots, g_n),$$

*i*-тая буква которого равна значению  $g_i = g(i)$  отображения  $g$  на элементе *i*. Например, слово

$$(2, 4, 3, 5, 1) \in S_5$$

задаёт отображение  $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 1$ . Композиция  $fg$  перестановок  $f, g$  действует по правилу  $fg : i \mapsto f(g(i))$ . Например, в группе  $S_5$  две возможных композиции перестановок  $f = (2, 4, 3, 5, 1)$  и  $g = (3, 2, 1, 5, 4)$  суть  $fg = (3, 4, 2, 1, 5)$  и  $gf = (2, 5, 1, 4, 3)$ .

Назовём пару возрастающих чисел  $i < j$  *инверсной* для перестановки  $g$ , если  $g_i > g_j$ . Таким образом, каждая перестановка  $g \in S_n$  разбивает множество всех  $n(n-1)/2$  возрастающих пар  $1 \leq i < j \leq n$  на два непересекающихся подмножества — *инверсные пары* и *неинверсные пары*. Количество инверсных пар перестановки  $g$  называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки  $g$  и обозначается  $\ell(g)$ .

**Упражнение 8.1.** Найдите  $\max \ell(g)$  по всем  $g \in S_n$  и укажите все перестановки на которых он достигается.

Число  $\text{sgn}(g) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$  называется *знаком* перестановки  $g$ . Перестановка  $g$  называется *чётной*, если  $\text{sgn}(g) = 1$  и *нечётной*, если  $\text{sgn}(g) = -1$ .

Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента  $i, j$  и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается  $\sigma_{ij}$  и называется *транспозицией* *i*-го и *j*-го элементов.

**Упражнение 8.2.** Убедитесь, что каждая перестановка  $g \in S_n$  является композицией транспозиций.

Разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию  $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$  иначе можно записать как  $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$  или как  $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$ . Тем не менее чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка  $g$ , не зависит от способа разложения и совпадает с чётностью числа инверсных пар перестановки  $g$ , т. е. все чётные перестановки являются композициями чётного числа транспозиций, а нечётные — нечётного. Это вытекает из следующей леммы.

**ЛЕММА 8.1**

$\text{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\text{sgn}(g)$  для любой перестановки  $g \in S_n$  и любой транспозиции  $\sigma_{ij} \in S_n$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Перестановки

$$\begin{aligned} g &= (g_1, \dots, g_{i-1}, \mathbf{g}_i, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \mathbf{g}_j, g_{j+1}, \dots, g_n) \\ g\sigma_{ij} &= (g_1, \dots, g_{i-1}, \mathbf{g}_j, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \mathbf{g}_i, g_{j+1}, \dots, g_n) \end{aligned} \tag{8-1}$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов  $g_i$  и  $g_j$ , стоящих на  $i$ -том и  $j$ -том местах перестановки  $g$ . В этих двух перестановках пара  $(i, j)$ , а также  $2(j - i - 1)$  пар вида  $(i, m)$  и  $(m, j)$  с произвольным  $m$  из промежутка  $i < m < j$  имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова.  $\square$

Следствие 8.1

Если перестановка  $g$  является композицией  $m$  транспозиций, то  $\text{sgn}(g) = (-1)^m$  и чётность перестановки совпадает с чётностью числа  $m$ .

Доказательство. Тождественная перестановка не имеет инверсных пар и, стало быть, чётна. В силу леммы, перестановка получающаяся из тождественной умножением на  $m$  транспозиций, имеет чётность  $(-1)^m$ .  $\square$

Следствие 8.2 (знаковый гомоморфизм)

Отображение  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{+1, -1\}$ ,  $g \mapsto (-1)^{\ell(g)}$ , является мультиплекативным гомоморфизмом, т. е.  $\text{sgn}(gh) = \text{sgn}(g)\text{sgn}(h)$  для всех  $g, h \in S_n$ , и множества чётных и нечётных перестановок суть полные прообразы элементов 1 и  $-1$  при этом гомоморфизме.  $\square$

ПРИМЕР 8.1 (правило ниточек)

Интерпретация чётности перестановки как чётности числа инверсных пар даёт практический способ отыскания чётности перестановки — не самый быстрый<sup>1</sup>, но полезный в ряде ситуаций, с которыми мы далее столкнёмся. Напишем исходные числа и их перестановку друг под другом, как на рис. 8◦1, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вылезала за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными<sup>2</sup>. Тогда чётность числа инверсных пар будет равна чётности числа точек пересечения нитей.

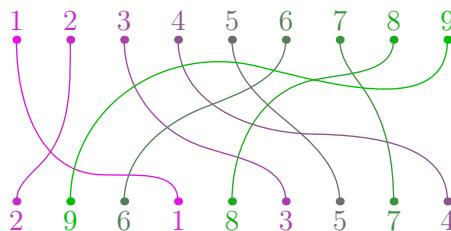


Рис. 8◦1.  $\text{sgn}(2, 9, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4) = +1$  (всего 18 пересечений).

Упражнение 8.3. Докажите это и убедитесь при помощи правила ниточек, что знак *тасующей перестановки*  $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$ , где оба набора номеров  $i_1, \dots, i_k$  и  $j_1, \dots, j_m$  возрастают слева направо, равен  $\text{sgn}(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m) = (-1)^{|I|+k(k+1)/2}$ , где  $|I| \stackrel{\text{def}}{=} i_1 + \dots + i_k$ .

<sup>1</sup>Обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны.

<sup>2</sup>Это означает, что в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём пересечение происходит трансверсально:  $\chi$ , а не по касательной:  $\times$ .

**8.2. Определитель.** Рассмотрим произвольное коммутативное кольцо  $K$  с единицей, произвольную квадратную матрицу  $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$  и обозначим через  $v_1, \dots, v_n \in K^n$  её столбцы. Многочлен

$$\det C = \det(v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \dots c_{g_n n} \quad (8-2)$$

называется *определителем* матрицы  $C$  или набора векторов  $v_1, \dots, v_n$ . Формула (8-2) предписывает всеми возможными способами выбирать в матрице  $n$  элементов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце выбирался ровно один элемент. Каждые такие  $n$  элементов надо перемножить, а полученные  $n!$  произведений сложить с надлежащими знаками, определяемыми так: множество клеток, где стоят выбранные  $n$  элементов, представляет собою график биективного отображения  $j \mapsto g_j$  из множества номеров столбцов в множество номеров строк, т. е. перестановки  $n$  номеров  $\{1, \dots, n\}$ , и знак равен знаку этой перестановки. Например, определители матриц размеров  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \quad (8-3)$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33} \quad (8-4)$$

(во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции).

Предложение 8.1

Определитель  $\det C = \det(v_1, \dots, v_n)$  линеен по каждому столбцу  $v_i$  матрицы  $C$ , кососимметричен (т. е.  $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$  если  $v_i = v_j$  для некоторых  $i \neq j$ ) и не меняется при транспонировании матрицы<sup>1</sup> (т. е.  $\det C^t = \det C$ , где  $C^t = (c_{ij}^t)$  имеет  $c_{ij}^t = c_{ji}$ ).

Доказательство. Так как каждое из  $n!$  произведений, которые складываются в формуле (8-2), содержит ровно по одному сомножителю из каждого столбца, оно линейно по каждому столбцу, а значит линейна и их сумма. Если  $i$ -тый столбец матрицы  $C$  совпадает с  $j$ -тым, то  $c_{g_i i} = c_{g_j i}$  и  $c_{g_j j} = c_{g_i j}$  для любой перестановки  $g \in S_n$ . Множество всех перестановок разбивается в объединение не пересекающихся пар вида  $(g, g\sigma_{ij})$ , поскольку композиция с транспозицией  $\sigma_{ij} : S_n \rightarrow S_n$ ,  $g \mapsto g\sigma_{ij}$ , является инволютивной<sup>2</sup> биекцией без неподвижных точек<sup>3</sup>. В сумме (8-2) слагаемые, отвечающие каждой паре  $g$  и  $g\sigma_{ij}$  имеют вид

$$\text{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} \dots c_{g_i i} \dots c_{g_j j} \dots c_{g_n n} \quad \text{и} \quad \text{sgn}(g\sigma_{ij}) \cdot c_{g_1 1} \dots c_{g_j i} \dots c_{g_i j} \dots c_{g_n n}$$

и различаются только знаком, сокращая друг друга. Поэтому сумма получится нулевая. Наконец, равенство  $\det C^t = \det C$  вытекает из того, что набор произведений  $n$ -ок матричных элементов в разложениях  $\det C$  и  $\det C^t$  одинаков, а знаки, с которыми каждое произведение входит в  $\det C$  и  $\det C^t$ , суть знаки обратных друг другу перестановок.

Упражнение 8.4. Покажите, что знаки обратных друг другу перестановок совпадают.

Тем самым, разложения (8-2) для  $\det C$  и  $\det C^t$  состоят из одних и тех же слагаемых с одними и теми же знаками.  $\square$

<sup>1</sup>См. обсуждение перед [предл. 5.4](#) на стр. 95.

<sup>2</sup>Т. е. обратной самой себе.

<sup>3</sup>Равенство  $g = g\sigma_{ij}$  невозможно, так как умножая на  $g^{-1}$  слева, получаем  $\text{Id} = \sigma_{ij}$ , что не так.

Следствие 8.3

Определитель является полилинейной кососимметричной функцией от строк матрицы.  $\square$

Следствие 8.4

Определитель меняет знак при любой транспозиции строк или столбцов матрицы<sup>1</sup>.

Доказательство. В силу кососимметричности и полилинейности

$$0 = \det(\dots, (v_i + v_j), \dots, (v_i + v_j), \dots) = \det(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \det(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots),$$

что и утверждается.  $\square$

Упражнение 8.5. Убедитесь, что если  $1 + 1 \neq 0$  в  $K$ , то каждая знакопеременная функция от  $n$  векторов кососимметрична.

ПРИМЕР 8.2 (ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВАНДЕРМОНДА И БАЗИС ШУРА)

Многочлен  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  называется **знакопеременным** если для всех перестановок  $g \in S^n$

$$f(x_{g_1}, \dots, x_{g_n}) = \text{sgn}(g) \cdot f(x_1, \dots, x_n).$$

Так как при транспозиции любой пары переменных знакопеременный многочлен  $f$  меняет знак, в каждом мономе  $x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}$  многочлена  $f$  все степени  $\nu_i$  попарно различны, и вместе с таким мономом в  $f$  входят  $n!$  мономов  $x_{g_1}^{\nu_1} \dots x_{g_n}^{\nu_n}$ , где  $g \in S_n$ , причём коэффициенты при мономах  $x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}$  и  $x_{g_1}^{\nu_1} \dots x_{g_n}^{\nu_n}$  получаются друг из друга умножением на знак  $\text{sgn}(g)$ . Мы заключаем, что знакопеременные многочлены образуют свободный  $\mathbb{Z}$  модуль с базисом из многочленов

$$\Delta_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) x_{g_1}^{\nu_1} \dots x_{g_n}^{\nu_n} = \det(x_j^{\nu_i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \dots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \dots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \dots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix}, \quad (8-5)$$

которые нумеруются диаграммами Юнга  $\nu$  из  $n$  строк попарно разных длин  $\nu_1 > \dots > \nu_n \geq 0$ . Минимальной такой диаграмме  $\delta = ((n-1), \dots, 0)$  отвечает определитель Вандермонда

$$\Delta_\delta = \det(x_j^{n-i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (x_i - x_j). \quad (8-6)$$

Последнее равенство вытекает из того, что при подстановке  $x_i = x_j$  с  $j \neq i$  определитель Вандермонда, как и всякий знакопеременный многочлен, обращается в нуль, и поэтому делится в  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  на  $x_i - x_j$ . Так все такие разности неприводимы, а кольцо  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  фактически определитель Вандермонда делится на  $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$ , а поскольку лексикографически старшие мономы определителя и произведения равны  $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$  и имеют коэффициент 1, частное от деления равно 1. Это рассуждение показывает, что любой знакопеременный многочлен  $f$  делится в  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  на определитель Вандермонда, и частное является симметрическим многочленом. Мы заключаем, что знакопеременные многочлены образуют свободный модуль ранга 1 с базисом  $\Delta_\delta$  над кольцом симметрических многочленов, а симметрические многочлены Шура  $\sigma_\lambda = \Delta_{\lambda+\delta}/\Delta_\delta$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  пробегает произвольные диаграммы Юнга из  $n$  строк, а  $\lambda + \delta = (\lambda_1 + (n-1), \lambda_2 + (n-2), \dots, \lambda_n)$ , образуют базис  $\mathbb{Z}$ -модуля симметрических многочленов.

<sup>1</sup>Функции с таким свойством называются **знакопеременными**.

**8.3. Грассмановы многочлены.** Алгебра грассмановых многочленов  $K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$  от переменных  $\xi_1, \dots, \xi_n$  с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце  $K$  с единицей определяется точно также, как алгебра обычных многочленов, но только грассмановы переменные  $\xi_i$ , в отличие от обычных, не коммутируют, а антисимметризируют друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям<sup>1</sup>

$$\forall i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0. \quad (8-7)$$

Символ « $\wedge$ » здесь и далее используется для обозначения грассманова (антисимметричного) умножения, чтобы отличать его от обычного (коммутативного). Константы из  $K$  по определению перестановочны с грассмановыми переменными, и умножение переменных на константы записывается обычным образом:  $a\xi_i = \xi_i a$ , для всех  $i$  и всех  $a \in K$ . Для каждой строго возрастающей слева направо последовательности номеров  $I = (i_1, \dots, i_m)$ , где  $i_1 < \dots < i_m$ , положим

$$\xi_I \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}. \quad (8-8)$$

Каждая перестановка  $g = (g_1, \dots, g_m) \in S_m$  переменных в этом мономе меняет его знак по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \text{sgn}(g) \cdot \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}. \quad (8-9)$$

Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, мономы (8-9) исчерпывают всё множество грассмановых мономов, т. е. однородные грассмановы многочлены степени  $m$  от  $n$  переменных  $\xi_1, \dots, \xi_n$  по-определению образуют свободный  $K$ -модуль ранга  $\binom{n}{m}$  с базисом из мономов (8-8). Этот модуль обозначается  $\Lambda^m$ . Вся грассманова алгебра как модуль над  $K$  является конечной прямой суммой  $K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \Lambda^2 \oplus \dots \oplus \Lambda^n$ , где младшее слагаемое  $\Lambda^n \simeq K$  состоит из констант и имеет в качестве базиса моном  $\xi_{\emptyset} \stackrel{\text{def}}{=} 1$ , отвечающий пустому набору  $I = \emptyset$  и служащий единицей грассмановой алгебры, а старшее слагаемое  $\Lambda^n \simeq K$  имеет в качестве базиса  $\xi_{(1, \dots, n)} = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$  — единственный моном степени  $n$ , отвечающий набору  $I = (1, \dots, n)$ . Обратите внимание, что этот моном аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом. Умножение базисных мономов  $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}$  и  $\xi_J = \xi_{j_1} \wedge \dots \wedge \xi_{j_m}$  происходит по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \text{sgn}(I, J) \xi_{I \sqcup J} & \text{если } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{если } I \cap J \neq \emptyset, \end{cases} \quad (8-10)$$

где  $\text{sgn}(I, J)$  — знак тасующей перестановки, упорядочивающей набор  $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$  по возрастанию<sup>2</sup>. Так как для базисных грассмановых мономов выполняется равенство<sup>3</sup>

$$(\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}) \wedge (\xi_{j_1} \wedge \dots \wedge \xi_{j_m}) = (-1)^{km} (\xi_{j_1} \wedge \dots \wedge \xi_{j_m}) \wedge (\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}),$$

однородные грассмановы многочлены коммутируют друг с другом по правилу

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{\deg \omega \deg \eta} \eta \wedge \omega, \quad (8-11)$$

<sup>1</sup>Если  $1+1$  не делит нуль в  $K$ , то соотношения  $\xi_i \wedge \xi_i = 0$  могут быть опущены, поскольку они вытекают из соотношений  $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ , если положить в них  $i = j$ . Если же  $-1 = 1$ , то антисимметризование  $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$  не отличается от коммутации  $\xi_i \wedge \xi_j = \xi_j \wedge \xi_i$ , и в этой ситуации именно соотношение  $\xi_i \wedge \xi_i = 0$  отличает грассмановы переменные от обычных.

<sup>2</sup>Если  $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$ , то  $\text{sgn}(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m) = (-1)^{|I|+k(k+1)/2}$  по упр. 8.3 на стр. 128.

<sup>3</sup>Для проноса каждой из  $m$  переменных  $\xi_j$  влево через  $k$  переменных  $\xi_i$  нужно совершить  $k$  транспозиций.

которое называется *кошулевым правилом знаков*. В частности, любой однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грассмановыми многочленами.

Упражнение 8.6. Опишите *центр* грассмановой алгебры

$$Z(K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \tau \in K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle \mid \forall \omega \in K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle \ \tau \wedge \omega = \omega \wedge \tau \}.$$

**8.3.1. Грассманова алгебра свободного модуля.** Обозначим через  $V$  свободный  $K$ -модуль ранга  $r$ . Если векторы  $e_1, \dots, e_r \in V$  образуют базис модуля  $V$ , то алгебра грассмановых многочленов  $K \langle e_1, \dots, e_r \rangle$  от переменных  $e_1, \dots, e_r$  обозначается  $\Lambda V$  и называется *грассмановой* (или *внешней*) алгеброй свободного модуля  $V$ , а подмодуль однородных грассмановых многочленов степени  $d$  обозначается  $\Lambda^d V \subset \Lambda V$  и называется *d-й внешней степенью* свободного модуля  $V$ . Эти не апеллирующие к выбору базиса названия и обозначения связаны с тем, что при каждом  $d = 0, 1, \dots, n$  подмодуль  $\Lambda^d = \Lambda^d V \subset K \langle e_1, \dots, e_r \rangle$  однородных многочленов степени  $d$  не зависит от выбора базиса в  $V$ . В самом деле, подмодуль констант  $\Lambda^0 V \simeq K$  порождается единицей грассмановой алгебры, подмодуль  $\Lambda^1 V$  однородных грассмановых многочленов степени 1, т. е. множество всевозможных  $K$ -линейных комбинаций базисных векторов  $e_1, \dots, e_r$ , канонически отождествляется с модулем  $V$  и тоже не зависит от выбора базиса, а для прочих  $d$  подмодуль  $\Lambda^d V \subset K \langle e_1, \dots, e_r \rangle$  является линейной оболочкой всевозможных произведений  $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ , составленных из  $d$  произвольных векторов  $v_i \in V$  и опять таки не зависит от выбора базиса. Таким образом, вся алгебра  $\Lambda V = \bigoplus_{d=0}^n \Lambda^d V$  является прямой суммой модулей, не зависящих от выбора базиса в  $V$ .

Упражнение 8.7. Убедитесь, что  $v \wedge v = 0$  и  $u \wedge w = -w \wedge u$  для всех  $u, v, w \in V$ .

**8.3.2. Линейные замены переменных и миноры.** Пусть в обозначениях их предыдущего раздела  $n$  однородных грассмановых линейных форм  $\eta_1, \dots, \eta_n \in \Lambda^1 V$  линейно выражается через  $m$  однородных грассмановых форм  $\xi_1, \dots, \xi_m \in \Lambda^1 V$  по формуле

$$(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_m) \cdot C,$$

где  $C \in \text{Mat}_{n \times k}(K)$ . Тогда при каждом  $d$  произведения  $\eta_J = \eta_{j_1} \wedge \dots \wedge \eta_{j_d}$  степени  $d$  линейно выражается через произведения  $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_d}$  по формуле

$$\begin{aligned} \eta_J &= \eta_{j_1} \wedge \dots \wedge \eta_{j_d} = \left( \sum_{i_1} \xi_{i_1} c_{i_1 j_1} \right) \wedge \left( \sum_{i_2} \xi_{i_2} c_{i_2 j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i_d} \xi_{i_d} c_{i_d j_d} \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq m} \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_d} \cdot \sum_{g \in S_d} \text{sgn}(g) c_{i_{g(1)} j_1} \dots c_{i_{g(d)} j_d} = \sum_I \xi_I \cdot c_{IJ}, \end{aligned} \quad (8-12)$$

где  $I = (i_1, \dots, i_d)$  пробегает наборы из  $d$  возрастающих номеров, а  $c_{IJ} = \det C_{IJ}$  обозначает определитель  $d \times d$ -подматрицы  $C_{IJ} \subset C$ , сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из  $J$  и строк с номерами из  $I$ . Определитель  $c_{IJ} \stackrel{\text{def}}{=} \det C_{IJ}$  называется *IJ-тым минором*  $d$ -того порядка в матрице  $C$ . Таким образом, *IJ-ый* элемент матрицы, выражающей грассмановы мономы  $\eta_J$  через грассмановы мономы  $\xi_I$  равен *IJ-ому* минору  $d$ -того порядка в матрице, выражающей переменные  $\eta$  через переменные  $\xi$ . Матрица размера  $\binom{n}{d} \times \binom{n}{d}$ , клетки которой нумеруются лексикографически упорядоченными наборами  $I$  из  $d$  возрастающих номеров и которая имеет в клетке  $(IJ)$  минор  $c_{IJ}$  матрицы  $C$ , обозначается  $\Lambda^d C$  и называется *d-й внешней степенью* матрицы  $C$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2 (МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ ВНЕШНИХ СТЕПЕНЕЙ)

Для любых матриц  $A \in \text{Mat}_{m \times k}(K)$ ,  $B \in \text{Mat}_{k \times n}(K)$  над произвольным коммутативным кольцом  $K$  при всех  $1 \leq d \leq \min(m, n, k)$  выполняется равенство  $\Lambda^d(A \cdot B) = \Lambda^d A \cdot \Lambda^d B$ . В частности, для квадратных матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в свободном  $K$ -модуле  $V$  с базисом  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$  наборы векторов  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) = \mathbf{e} A$  и  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) = \mathbf{a} B = \mathbf{e} AB$ . Обозначим через  $\mathbf{e}_d \subset \Lambda^d V$  набор из  $\binom{m}{d}$  грассмановых мономов  $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$ , а через  $\mathbf{b}_d, \mathbf{a}_d \subset \Lambda^d V$  — наборы из  $\binom{n}{d}$  и  $\binom{k}{d}$  грассмановых многочленов  $b_J = b_{j_1} \wedge \dots \wedge b_{j_d}$  и  $a_L = a_{\ell_1} \wedge \dots \wedge a_{\ell_d}$  соответственно. Набор мономов  $\mathbf{e}_d$  является базисом в  $\Lambda^d V$ , а набор многочленов  $\mathbf{b}_d$  выражается через него, с одной стороны, как  $\mathbf{b}_d = \mathbf{e}_d \Lambda^d(AB)$ , а с другой стороны — как  $\mathbf{b}_d = \mathbf{a}_d \Lambda^d B = \mathbf{e}_d \Lambda^d A \Lambda^d B$ . Поскольку матрица перехода от произвольного набора векторов к базису однозначно определяется этим набором, мы заключаем, что  $\Lambda^d(A \cdot B) = \Lambda^d A \cdot \Lambda^d B$ .  $\square$

ПРИМЕР 8.3 (ДЕТЕРМИНАНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ)

Из предл. 8.2 вытекает, что столбцы матрицы  $\Lambda^k(AB)$  являются линейными комбинациями столбцов матрицы  $\Lambda^k A$ . Поэтому любое число  $x \in K$ , делящее все  $k \times k$  миноры матрицы  $A$ , делит и все  $k \times k$  миноры матрицы  $AB$  для любой матрицы  $B$ , на которую  $A$  можно умножить справа. Если матрица  $B$  обратима, то  $A = (AB)B^{-1}$  получается из матрицы  $AB$  правым умножением на матрицу  $B^{-1}$ , и значит, число  $x \in K$ , делящее все  $k \times k$  миноры матрицы  $AB$ , делит и все  $k \times k$  миноры матрицы  $A$ . Мы заключаем, что наибольший общий делитель  $k \times k$  миноров любой матрицы  $A$  не меняется при умножении матрицы  $A$  справа на обратимые матрицы. Аналогично проверяется, что наибольший общий делитель  $k \times k$  миноров матрицы  $A$  не меняется при умножении матрицы  $A$  на обратимые матрицы слева. Обозначим наибольший общий делитель всех  $k \times k$  миноров матрицы  $A$  через  $\Delta_k(A)$ .

Если кольцо  $K$  является областью главных идеалов, то по теор. 6.1 на стр. 103 для любой матрицы  $A$  найдутся такие обратимые матрицы  $L$  и  $R$ , что у матрицы  $D_A = L A R$  все элементы  $d_{ij}$  с  $i \neq j$  нулевые, и  $d_{ii} \mid d_{jj}$  при  $i < j$ . Поскольку  $\Delta_k(D_A) = d_{11} \dots d_{kk}$  и  $\Delta_k(A) = \Delta_k(D_A)$ , мы заключаем, что  $d_{ii} = \Delta_i(A)/\Delta_{i-1}(A)$ , если  $\Delta_{i-1}(A) \neq 0$ , а если  $\Delta_k(A) = 0$  при каком-то  $k$ , то  $d_{jj} = 0$  при всех  $j \geq k$ . Это даёт новое доказательство независимости нормальной формы Смита<sup>1</sup>  $D_A$  и инвариантных множителей  $d_{ii}$  матрицы  $A$  от способа её приведения к нормальной форме Смита.

ПРИМЕР 8.4 (ДИСКРИМИНАНТ СОИЗМЕРИМОЙ ПОДРЕШЁТКИ И ФОРМУЛА ПИКА)

Пусть  $\mathbb{Z}$ -подмодуль  $U \subset \mathbb{Z}^n$  таков, что фактор  $\mathbb{Z}^n / U$  конечен. Обозначим через  $\mathbf{e}$  какой-нибудь базис в  $\mathbb{Z}^n$ , а через  $\mathbf{u} = \mathbf{e} C_{eu}$  — какой-нибудь базис в  $U$ . Абсолютная величина определителя матрицы  $C_{eu}$  называется **дискриминантом соизмеримой**<sup>2</sup> с  $\mathbb{Z}^n$  подрешётки  $U$  и обозначается

$$D_U \stackrel{\text{def}}{=} |\det C_{eu}|.$$

УПРАЖНЕНИЕ 8.8. Покажите, что если матрица  $C \in \text{Mat}_n(K)$  обратима, то  $\det C$  обратим в  $K$ .

Из упражнения вытекает, что дискриминант не зависит от выбора базисов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{u}$ , так как для любых других базисов  $\mathbf{v} = \mathbf{e} C_{ev}$  в  $\mathbb{Z}^n$  и  $\mathbf{w} = \mathbf{u} C_{uw}$  в  $U$  матрицы переходов  $C_{ve} = C_{ev}^{-1}$  и  $C_{uw}$ , будучи обратимыми над  $\mathbb{Z}$ , имеют определители  $\pm 1$ , откуда

$$|\det C_{vw}| = |\det(C_{ve} C_{eu} C_{uw})| = |\det(C_{ve}) \det(C_{eu}) \det(C_{uw})| = |\det C_{eu}|.$$

<sup>1</sup>См. п° 6.1.1 на стр. 103.

<sup>2</sup>См. предл. 7.2 на стр. 124.

Беря качестве  $e$  и  $u$  взаимные базисы  $v_1, \dots, v_n$  и  $\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n$ , заключаем, что дискриминант  $D_U = \lambda_1 \dots \lambda_n$  равен числу элементов в факторе  $\mathbb{Z}^n / U \simeq \mathbb{Z}/(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(\lambda_n)$ .

На геометрическом языке<sup>1</sup> дискриминант  $D_U$  решётки  $L \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$  равен евклидову объёму<sup>2</sup> параллелепипеда  $\Pi$ , натянутого в пространстве  $\mathbb{R}^n$  на какой-нибудь базис решётки  $U$ . Такой параллелепипед называется *фундаментальным параллелепипедом* решётки  $U$ . Его сдвиги на векторы решётки покрывают всё пространство  $\mathbb{R}^n$ , не имея при этом общих внутренних точек. Каждый элемент фактора  $\mathbb{Z}^n / U$  представляется точкой, лежащей в  $\Pi$ . При этом каждая внутренняя точка  $\Pi$  не сравнима по модулю  $U$  ни с какими другими точками из  $\Pi$ , каждая внутренняя точка любой  $(n-1)$ -мерной гиперграницы  $\Pi$  сравнима ещё ровно с одной точкой из  $\Pi$ , лежащей на параллельной гипергранице, каждая внутренняя точка любой  $(n-2)$ -мерной границы  $\Pi$  сравнима ровно с тремя точками из  $\Pi$ , лежащими на трёх параллельных  $(n-2)$ -мерных гранях, и т. д. Каждая вершина  $\Pi$  сравнима с остальными  $2^n - 1$  вершинами. Мы заключаем, что объём  $\Pi$ , равный числу элементов в факторе  $\mathbb{Z}^n / U$ , может быть вычислен по формуле Пика:

$$\text{Vol } \Pi = \sum_{d=0}^n p_d / 2^{n-d},$$

где  $p_d$  при  $d < n$  обозначает число точек, лежащих внутри  $d$ -мерных граней  $\Pi$ , а  $p_n$  — число внутренних точек самого  $\Pi$ .

### 8.3.3. Соотношения Лапласа. Для каждого набора из $m$ возрастающих индексов

$$J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$$

положим  $\deg J \stackrel{\text{def}}{=} m$ ,  $|J| \stackrel{\text{def}}{=} j_1 + \dots + j_m$  и обозначим через  $\bar{J} = (\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_{n-m}) = \{1, \dots, n\} \setminus J$  дополнительный к  $J$  набор из  $n - m$  возрастающих индексов. Для произвольной квадратной матрицы  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$  рассмотрим в грассмановой алгебре  $K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$  набор из  $n$  линейных форм

$$\alpha_j = \xi_1 a_{1j} + \xi_2 a_{2j} + \dots + \xi_n a_{nj}, \quad \text{где } 1 \leq j \leq r, \quad (8-13)$$

или, в матричных обозначениях,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n) A$ . Для двух наборов индексов  $I, J$  одинаковой длины  $\deg I = \deg J = m$  произведения

$$\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_m} \quad \text{и} \quad \alpha_{\bar{I}} = \alpha_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{\bar{j}_{n-m}}$$

имеют дополнительные степени  $m$  и  $n - m$ . Перемножая их по формуле (8-10), получим<sup>3</sup>

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\bar{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \quad (8-14)$$

Подставляя в равенство (8-14) разложения (8-13) и пользуясь формулами (8-12), в левой части равенства получим

$$\left( \sum_M \xi_M a_{MJ} \right) \wedge \left( \sum_L \xi_L a_{L\bar{I}} \right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n \sum_M (-1)^{|M|} a_{MJ} a_{\bar{M}\bar{I}},$$

<sup>1</sup>См. лекцию [http://video.bogomolov-lab.ru/gorod/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_08.pdf](http://video.bogomolov-lab.ru/gorod/ps/stud/geom_ru/2122/lec_08.pdf).

<sup>2</sup>См. раздел 1.2.1 на стр. 133 лекции

[http://video.bogomolov-lab.ru/gorod/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_10.pdf](http://video.bogomolov-lab.ru/gorod/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf).

<sup>3</sup>Знак соответствующей тасующей перестановки был вычислен в упр. 8.3 на стр. 128.

где  $M$  пробегает все индексы длины  $\deg M = m$ , а в правой части при  $I \neq J$  по-прежнему будет 0, а при  $I = J$  получится  $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$ . Мы заключаем, для любых двух наборов  $J, I$  из  $m$  столбцов произвольной квадратной матрицы  $A \in \text{Mat}_n(K)$  выполняются соотношения Лапласа

$$\sum_M (-1)^{|M|+|J|} a_{MJ} a_{\overline{M}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J, \\ 0 & \text{при } I \neq J, \end{cases} \quad (8-15)$$

где суммирование идёт по всем наборам  $M$  из  $m$  строк матрицы  $A$ .

При  $I = J$  соотношение (8-15) даёт формулу для вычисления определителя  $\det A$  через все возможные миноры  $a_{MJ}$  порядка  $m$ , сосредоточенные в  $m$  фиксированных столбцах матрицы  $A$  с номерами  $J$ , и дополнительные к ним миноры  $a_{\overline{JM}}$  порядка  $n - m$ , равные определителям матриц, получающихся из  $A$  вычёркиванием всех строк и столбцов, содержащих минор  $a_{MJ}$ :

$$\det A = \sum_M (-1)^{|M|+|J|} a_{MJ} a_{\overline{M}}. \quad (8-16)$$

Произведение  $(-1)^{|M|+|J|} a_{\overline{M}}$  называется *алгебраическим дополнением* к минору  $a_{MJ}$ . При  $I \neq J$  соотношение (8-15) с точностью до знака имеет вид

$$\sum_M (-1)^{|M|+|I|} a_{MJ} a_{\overline{M}} = 0 \quad (8-17)$$

и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку левая часть в (8-17) отличается от (8-16) тем, что миноры  $a_{MJ}$  умножаются не на свои алгебраические дополнения, а на дополнения к сосредоточенным в другом наборе столбцов  $I \neq J$  минорам  $a_{MI}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 8.9. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_M (-1)^{|I|+|M|} a_{JM} a_{\overline{M}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J. \end{cases} \quad (8-18)$$

Если обозначить через  $\Lambda^m A^\vee$  матрицу размера  $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$ , клетки которой, как и у матрицы  $\Lambda^m A$ , нумеруются  $m$ -элементными подмножествами  $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ , но в клетке  $(IJ)$  стоит *алгебраическое дополнение* к  $JI$ -минору<sup>1</sup> матрицы  $A$ , т. е.  $(-1)^{|I|+|J|} a_{\overline{JI}}$ , то все соотношения (8-15) и (8-18) можно свернуть в одно матричное равенство

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^m A^\vee = \Lambda^m A^\vee \cdot \Lambda^m A = \det(A) \cdot E, \quad (8-19)$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $\binom{n}{d} \times \binom{n}{d}$ . Матрица  $\Lambda^m A^\vee$  называется *присоединённой* к матрице  $\Lambda^m A$ .

ПРИМЕР 8.5 (СООТНОШЕНИЕ ПЛЮККЕРА)

Рассмотрим  $2 \times 4$  матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Обратите внимание, что индексы  $I$  и  $J$  приведены!

с элементами из кольца  $K = \mathbb{Z}[a_{11}, \dots, a_{24}]$  многочленов от восьми переменных  $a_{ij}$  и обозначим через  $A_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$ , где  $1 \leq i < j \leq 4$ , её  $2 \times 2$  минор, образованный  $i$ -м и  $j$ -м столбцами. Раскладывая нулевой определитель

$$0 = \det \begin{pmatrix} A & \\ & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

по первым двум строкам, заключаем, что шесть миноров  $A_{ij}$  связаны соотношением Плюккера

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0. \quad (8-20)$$

Упражнение 8.10. Убедитесь, для любого поля  $\mathbb{k}$  и любых шести чисел  $A_{ij} \in \mathbb{k}$ , удовлетворяющих соотношению (8-20), существует матрица  $A \in \text{Mat}_{2 \times 4}(\mathbb{k})$  с  $2 \times 2$  минорами  $A_{ij}$ .

Мы заключаем, что шесть чисел  $A_{ij}$  из поля  $\mathbb{k}$  являются минорами  $2 \times 4$  матрицы с элементами из  $\mathbb{k}$  если и только если они удовлетворяют соотношению Плюккера (8-20).

#### ПРИМЕР 8.6 (ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПУЧКА МАТРИЦ)

Рассмотрим квадратные матрицы  $A, B \in \text{Mat}_n(K)$  и пару коммутирующих переменных  $x, y$ . Матрица  $xA + yB$  имеет элементы в  $K[x, y]$ , и её определитель  $\det(xA + yB)$  является однородным многочленом степени  $n$  от  $x$  и  $y$ . Покажем, что его коэффициент при  $x^m y^{n-m}$  равен

$$\text{tr}(A^m \cdot B^\vee) = \sum_{IJ} (-1)^{|I|+|J|} a_{IJ} b_{\bar{I}\bar{J}}, \quad (8-21)$$

где суммирование идёт по всем  $m$ -элементным подмножествам  $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ . Для этого рассмотрим наборы линейных форм  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A$  и  $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)B$  от грассмановых переменных  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Тогда

$$\det(xA + yB) \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n = (x\alpha_1 + y\beta_1) \wedge (x\alpha_2 + y\beta_2) \wedge \dots \wedge (x\alpha_n + y\beta_n).$$

Моном  $x^m y^{n-m}$  возникает при выборе первого слагаемого в каких-либо  $m$  скобках, скажем, с номерами  $i_1, \dots, i_m$ , и второго слагаемого во всех остальных скобках. Вклад такого произведения в коэффициент при  $x^m y^{n-m}$  равен

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(i_1, \dots, i_m, \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{n-m}) \cdot \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_m} \wedge \beta_{\bar{i}_1} \wedge \dots \wedge \beta_{\bar{i}_{n-m}} = \\ & = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |I|} \alpha_I \wedge \beta_{\bar{I}} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |I|} \left( \sum_J \xi_J a_{JI} \right) \wedge \left( \sum_M \xi_M b_{M\bar{I}} \right) = \\ & = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |I|} \sum_{JM} a_{JI} \cdot b_{M\bar{I}} \cdot \xi_J \wedge \xi_M = \left( \sum_J (-1)^{|I|+|J|} a_{JI} \cdot b_{J\bar{I}} \right) \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n. \end{aligned}$$

Коэффициент при  $x^m y^{n-m}$  в  $\det(xA + yB)$  равен сумме этих вкладов по всем наборам  $I$  из  $m$  возрастающих номеров, что и даёт формулу (8-21).

**8.4. Присоединённая матрица.** При  $m = 1$  в вычислениях из [н° 8.3.3](#) на стр. 134 наборы  $I = (i)$ ,  $J = (j)$  содержат по одному индексу и миноры  $a_{IJ} = a_{ij}$  превращаются в матричные элементы, так что  $\Lambda^1 A = A$ . Присоединённая матрица  $\Lambda^1 A^\vee$  в этом случае обозначается просто  $A^\vee = (a_{ij}^\vee)$  и называется *присоединённой* к матрице  $A$ . Она имеет в клетке  $(i, j)$  определитель  $(n-1) \times (n-1)$ -подматрицы, получающейся из  $A$  выкидыванием креста с центром в клетке  $(j, i)$ , т. е.

$$a_{ij}^\vee = (-1)^{i+j} a_{\bar{j}\bar{i}}.$$

Соотношения Лапласа из форм. [\(8-19\)](#) на стр. 135 в этом случае превращаются в равенства

$$AA^\vee = A^\vee A = \det(A) \cdot E \quad (8-22)$$

в алгебре матриц  $\text{Mat}_n(K)$ .

**8.4.1. Формула для обратной матрицы.** Если определитель матрицы  $A \in \text{Mat}_n(K)$  обратим в  $K$ , то по [\(8-22\)](#) матрица  $A$  тоже обратима, и  $A^{-1} = A^\vee / \det A$ . Наоборот, если матрица  $A$  обратима, то  $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$ , и  $\det A$  обратим в  $K$ . Мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3

Квадратная матрица  $A \in \text{Mat}_n(K)$  с элементами из произвольного коммутативного кольца  $K$  с единицей обратима если и только если  $\det A$  обратим в  $K$ , и в этом случае  $A^{-1} = A^\vee / \det A$ .  $\square$

ПРИМЕР 8.7

Для матриц размера  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  с определителем 1

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{31}) & (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В общем случае все элементы матриц в правых частях надо поделить на  $\det A$ .

**8.4.2. Разложение определителя по строке или столбцу.** Вычисляя элемент в позиции  $ii$  первого произведения в [\(8-22\)](#), получаем равенство

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \quad (8-23)$$

которое называется *разложением определителя по  $i$ -той строке*. Симметричным образом, вычисление  $jj$ -того элемента второго произведения в [\(8-22\)](#) даёт *разложение по  $j$ -му столбцу*

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}. \quad (8-24)$$

Например, разложение определителя  $3 \times 3$  по первому столбцу имеет вид:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21} (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31} (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \end{aligned}$$

**8.4.3. Правило Крамера для систем однородных линейных уравнений.** Рассмотрим систему  $n$  линейных однородных уравнений на  $n + 1$  неизвестных

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (8-25)$$

и построим по матрице  $A = (a_{ij})$  её коэффициентов вектор  $\alpha = (A_0, A_1, \dots, A_n) \in K^{n+1}$ , у которого  $i$ -я координата равна умноженному на  $(-1)^i$  определителю квадратной  $n \times n$ -матрицы, получающейся из  $n \times (n + 1)$ -матрицы  $A$  выкидыванием  $i$ -того столбца:

$$A_i = (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,0} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (8-26)$$

Покажем, что вектор  $\alpha$  является решением системы (8-25). Дописывая к матрице  $A$  сверху ещё один экземпляр её  $i$ -той строки, мы получим квадратную матрицу размера  $(n + 1) \times (n + 1)$  с нулевым определителем. Раскладывая этот определитель по верхней строке, получаем равенство  $a_{i0}A_0 + \dots + a_{in}A_n = 0$ , справедливо при каждом  $i$ .

**Упражнение 8.11.** Проверьте, что если кольцо  $K = \mathbb{k}$  является полем, то уравнения (8-25) линейно независимы если и только если  $\alpha \neq 0$ , и в этом случае решения системы (8-25) образуют в  $\mathbb{k}^{n+1}$  одномерное векторное подпространство, порождённое вектором  $\alpha$ .

Например, в векторном пространстве  $\mathbb{k}^3$  пересечение не совпадающих плоскостей

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

является прямой с направляющим вектором  $(a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$ .

**8.4.4. Правило Крамера для систем неоднородных уравнений.** По [предл. 5.6](#) на стр. 97 столбцы  $v_1, \dots, v_n$  квадратной матрицы  $C \in \text{Mat}_n(K)$  образуют базис модуля  $K^n$  если и только если матрица  $C$  обратима, что по [предл. 8.3](#) равносильно обратимости в  $K$  её определителя  $\det(v_1, \dots, v_n) = \det C$ . Если это так, то коэффициенты разложения

$$w = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$$

произвольного вектора  $w \in K^n$  по базису  $v_1, \dots, v_n$  вычисляются по *правилу Крамера*

$$x_i = \frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det(v_1, \dots, v_n)}, \quad (8-27)$$

так как

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) &= \det(v_1, \dots, v_{i-1}, \sum_{\nu} x_{\nu}v_{\nu}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \\ &= \sum_{\nu} x_{\nu} \det(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{\nu}, v_{i+1}, \dots, v_n) = x_i \det(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n). \end{aligned}$$

**8.4.5. Тождество Гамильтона–Кэли.** Для любого коммутативного кольца  $K$  с единицей кольцо квадратных матриц  $\text{Mat}_n(K[t])$  с элементами из кольца многочленов  $K[t]$  совпадает с кольцом многочленов  $\text{Mat}_n(K)[t]$  от переменной  $t$  с коэффициентами в  $\text{Mat}_n(K)$ , поскольку каждую матрицу, в клетках которой стоят многочлены от  $t$ , можно записать как многочлен от  $t$  с матричными коэффициентами и наоборот. Например,

$$\begin{pmatrix} 3t^2 + 2t & t^3 - 1 \\ 2t + 3 & t^3 + t - 1 \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определение 8.1 (характеристический многочлен)

Для матрицы  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$  многочлен

$$\chi_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - A) = t^n - \sigma_1(A) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1}(A) \cdot t + (-1)^n \sigma_n(A) \in K[t]$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы  $A$ . Коэффициент при  $t^{n-k}$  в характеристическом многочлене обозначается через  $(-1)^k \sigma_k(A)$ .

Упражнение 8.12. Убедитесь, что число  $\sigma_k(A) \in K$  равно сумме главных  $k \times k$  миноров<sup>1</sup> матрицы  $A$ . В частности,  $\sigma_1(A) = \text{tr}(A)$  и  $\sigma_n(A) = \det A$  суть след и определитель матрицы  $A$ .

Теорема 8.1 (тождество Гамильтона–Кэли)

Рассмотрим кольцо  $K = \mathbb{Z}[a_{ij}]$  многочленов с целыми коэффициентами от  $n^2$  переменных  $a_{ij}$ , где  $1 \leq i, j \leq n$ . Матрица  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$  удовлетворяет в  $\text{Mat}_n(K)$  соотношению  $\chi_A(A) = 0$ .

Доказательство. Согласно форм. (8-22) на стр. 137, в кольце  $\text{Mat}_n(K[t])$  выполняется соотношение  $\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^\vee$ , где  $(tE - A)^\vee \in \text{Mat}_n(K[t])$  — матрица, присоединённая<sup>2</sup> к  $(tE - A)$ . Перепишем это равенство в виде равенства между многочленами от  $t$  с коэффициентами в кольце матриц  $\text{Mat}_n(K)$ :

$$t^n E - \sigma_1(A) t^{n-1} E + \dots + (-1)^n \sigma_n(A) E = (tE - A)(t^m A_m + \dots + t A_1 + A_0),$$

где  $A_0, A_1, \dots, A_m \in \text{Mat}_n(K)$  — некоторые матрицы. Подставляя в него  $t = A$ , получаем в кольце  $\text{Mat}_n(K)$  равенство  $\chi_A(A) \cdot E = 0$ , откуда  $\chi_A(A) = 0$ .  $\square$

Упражнение 8.13. Пусть  $f(t) = \sum_{i=0}^m t^i A_i$ ,  $g(t) = \sum_{j=0}^n t^j B_j \in \text{Mat}_r(K)[t]$  и

$$h(t) = f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{m+n} t^k H_k \in \text{Mat}_r(K)[t], \text{ где } H_k = \sum_{i+j=k} A_i B_j,$$

а матрица  $C \in \text{Mat}_r(K)$  такова, что  $CA_i = A_i C$  при всех  $i$ . Убедитесь, что  $f(C)g(C) = h(C)$  в  $\text{Mat}_r(K)$ .

<sup>1</sup>Т. е. определителей таких  $k \times k$  подматриц в  $A$ , главная диагональ которых является подмножеством главной диагонали матрицы  $A$ .

<sup>2</sup>См. п. 8.4 на стр. 137.

**8.5. Результант.** Пусть многочлены  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  и  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  имеют коэффициенты в произвольном поле  $\mathbb{k}$  и  $a_n b_m \neq 0$ . Обозначим через  $V_k \subset \mathbb{k}[x]$  векторное пространство многочленов степени строго меньше  $k$ . Наличие у  $f$  и  $g$  общего корня в каком-нибудь поле  $\mathbb{F} \supset \mathbb{k}$  равносильно тому, что  $\deg \text{нод}(f, g) \geq 1$ , а это в свою очередь эквивалентно существованию таких не равных одновременно нулю многочленов  $h_1 \in V_m$  и  $h_2 \in V_n$ , что  $fh_1 + gh_2 = 0$ .

Упражнение 8.14. Убедитесь в этом.

Мы заключаем, что многочлены  $f$  и  $g$  тогда и только тогда имеют общий корень в каком-нибудь расширении  $\mathbb{F} \supset \mathbb{k}$ , когда  $\mathbb{k}$ -линейное отображение

$$V_m \oplus V_n \rightarrow V_{m+n}, \quad (h_1, h_2) \mapsto fh_1 + gh_2, \quad (8.28)$$

имеет ненулевое ядро. Поскольку  $\dim(V_m \oplus V_n) = m + n = \dim V_{m+n}$ , это условие выражается равенством нулю определителя матрицы отображения (8.28) в каких-нибудь базисах. В стандартных базисах  $(1, 0), (x, 0), \dots, (x^{m-1}, 0), (0, 1), (0, x), \dots, (0, x^{n-1})$  в  $V_m \oplus V_n$  и  $1, x, \dots, x^{m+n-1}$  в  $V_{m+n}$  отображение (8.28) имеет матрицу

$$\left( \begin{array}{cccccc} a_0 & & b_0 & & & \\ a_1 & \ddots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & a_0 & b_{m-1} & \ddots & b_0 \\ a_n & \ddots & a_1 & b_m & \ddots & \vdots \\ \ddots & \vdots & & & \ddots & b_{m-1} \\ a_n & & & & & b_m \end{array} \right)_{m+n} \quad (8.29)$$

(в столбцах записаны коэффициентов многочленов  $f$  и  $g$ , последовательно сдвигаемые на одну клетку вниз при движении слева направо, все остальные элементы матрицы нулевые). Определитель матрицы (8.29) называется *детерминантом Сильвестра* многочленов  $f, g$ . Таким образом, многочлены  $f, g \in \mathbb{k}[x]$  имеют общий корень в некотором расширении  $\mathbb{F} \supset \mathbb{k}$  поля  $\mathbb{k}$ , если и только если их детерминант Сильвестра обращается в нуль.

Рассмотрим теперь кольцо  $K = \mathbb{Z}[a_n, b_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m]$  и многочлены

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \stackrel{\text{def}}{=} a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \\ B(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \stackrel{\text{def}}{=} b_m \prod_{j=1}^m (x - \beta_j), \end{aligned} \quad (8.30)$$

лежащие в кольце  $K[x]$ . Элемент  $R_{A,B}$  кольца  $K$ , задаваемый равенствами

$$R_{A,B} \stackrel{\text{def}}{=} a_n^m b_m^n \prod_{ij} (\alpha_i - \beta_j) = a_n^m \prod_{i=1}^n B(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{j=1}^m A(\beta_j) \quad (8.31)$$

называется *результатом* многочленов (8.30). Будучи симметрическим как по переменным  $\alpha_i$ , так и по переменным  $\beta_j$ , результат лежит в подкольце кольца  $K$ , состоящем из многочленов от  $a_n, b_m$  и от элементарных симметрических многочленов  $e_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  и  $e_\ell(\beta_1, \dots, \beta_m)$ .

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4

Результант  $R_{A,B}$  равен в кольце  $K$  детерминанту Сильвестра многочленов (8-30). Кроме того, существуют такие многочлены  $\varphi, \psi \in K[x]$ , что  $A(x) \cdot \varphi(x) + B(x) \cdot \psi(x) = R_{A,B}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим матрицу (8-29) через  $S$ . По предыдущему для любых многочленов  $\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \dots + \varphi_{n-1} x^{n-1}$  и  $\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x + \dots + \psi_{m-1} x^{m-1}$  столбец коэффициентов многочлена  $A\varphi + B\psi$  является результатом умножения столбца  $(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}, \psi_0, \dots, \psi_{m-1})^t$  слева на матрицу  $S$ . Из равенства  $S \cdot S^\vee = \det(S) \cdot E$  вытекает, что в первом столбце матрицы  $S^\vee$  выписаны друг под другом коэффициенты таких многочленов  $\varphi, \psi \in K[x]$ , что

$$A(x) \cdot \varphi(x) + B(x) \cdot \psi(x) = \det S \in K. \quad (8-32)$$

Рассмотрим  $\det S \in \mathbb{Z}[a_n, b_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m]$  как многочлен от  $\alpha_i$  с коэффициентами в кольце многочленов от всех остальных переменных. Полагая  $\alpha_i = \beta_j$  и подставляя в равенство (8-32)  $x = \alpha_i = \beta_j$  получаем в левой части нуль, поскольку при  $\alpha_i = \beta_j$  оба многочлена  $A(x)$  и  $B(x)$  обращаются в нуль при  $x = \alpha_i = \beta_j$ . Поэтому  $\det S$  делится в кольце  $K$  на все разности  $\alpha_i - \beta_j$ . Так как кольцо  $K = \mathbb{Z}[a_n, b_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m]$  факториально, а все эти разности неприводимы и попарно не ассоциированы,  $\det S$  делится на  $\prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$ . С другой стороны, по формулам Виета  $a_k = (-1)^{n-k} a_n e_{n-k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  и  $b_k = (-1)^{m-k} b_m e_{m-k}(\beta_1, \dots, \beta_m)$ , где  $e_i$  — элементарные симметрические многочлены. Поэтому первые  $m$  столбцов матрицы  $S$  делятся на  $a_n$ , а последние  $n$  — на  $b_m$ . Тем самым  $\det S$  делится на  $a_n^m b_m^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) = R_{A,B}$ . Поскольку лексикографически старшие члены у  $\det S$  и  $R_{A,B}$  оба равны  $a_n^m b_m^n (\alpha_1 \dots \alpha_n)^m$ , мы заключаем, что частное от деления равно 1.  $\square$

## ПРИМЕР 8.8 (исключение переменных)

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  пара чисел  $(x_0, y_0) \in \mathbb{k}^2$  тогда и только тогда является решением системы полиномиальных уравнений  $f(x, y) = g(x, y) = 0$ , где  $f, g \in \mathbb{k}[x, y]$ , когда многочлены  $f(x, y) = f_x(y)$  и  $g(x, y) = g_x(y)$ , рассматриваемые как многочлены от  $y$  с коэффициентами в кольце  $\mathbb{k}[x]$ , имеют при  $x = x_0$  общий корень  $y = y_0$ , что равносильно обращению в нуль при  $x = x_0$  результента  $R_{f_x, g_x} \in \mathbb{k}[x]$  этих двух многочленов от  $y$ . Таким образом каждая система из двух полиномиальных уравнений на  $x, y$  сводится к одному полиномиальному уравнению на  $x$  — обращению в нуль детерминанта Сильвестра, составленного из лежащих в  $\mathbb{k}[x]$  коэффициентов многочленов  $f_x, g_x \in \mathbb{k}[x][y]$ . Эта процедура называется *исключением переменной*  $y$  из уравнений  $f(x, y) = g(x, y) = 0$ .

## Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 8.1.  $\max \ell(g) = n(n-1)/2$  достигается на единственной перестановке  $(n, n-1, \dots, 1)$ .

Упр. 8.2. Индукция по  $n$ . Каждая перестановка  $g = (g_1, \dots, g_n)$  является композицией  $g = \sigma \circ g'$  транспозиций  $\sigma$ , переставляющей между собою элементы  $n$  и  $g_n$ , и перестановки  $g' = \sigma \circ g$ , оставляющей элемент  $n$  на месте. По индукции,  $g'$  раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемент  $n$ .

Упр. 8.3. Когда все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, идущие из  $i$  и из  $j$  пересекаются между собою нечётное число раз, если пара  $(i, j)$  инверсна, и чётное, если не инверсна<sup>1</sup>. Для тасующей перестановки  $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$  нити, выходящие из  $i_1, \dots, i_k$  верхней строки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно,  $i_1 - 1, i_2 - 2, \dots, i_k - k$  начинающихся левее нитей, выходящих из  $j$ -точек верхней строки, причём все эти нити не пересекаются между собою.

Упр. 8.4. Если  $g$  является композицией транспозиций  $\sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1$ , то  $g^{-1} = \sigma_1 \dots \sigma_k$  является произведением тех же транспозиций в противоположном порядке.

Упр. 8.6. При чётном  $n$  центр алгебры  $K \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$  линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном  $n$  — мономами чётных степеней и старшим мономом  $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$ , имеющим в этом случае нечётную степень.

Упр. 8.8. Беря определители в равенстве  $C \cdot C^{-1} = E$ , получаем  $\det(C) \cdot \det(C^{-1}) = \det E = 1$ .

Упр. 8.9. Это следует из равенств  $\det A = \det A^t$  и  $(AB)^t = B^t A^t$ .

Упр. 8.10. Если все  $A_{ij} = 0$ , положим  $A = 0$ , если, скажем,  $A_{12} \neq 0$ , положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что равенство

$$A_{34} = \det \begin{pmatrix} -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$$

эквивалентно соотношению Плюккера из форм. (8-20) на стр. 136.

Упр. 8.11. Если стоящие в левых частях уравнений (8-25) линейные формы

$$\alpha_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \in \mathbb{k}^{n+1*}$$

линейно независимы, то по лемме о замене<sup>2</sup> ими можно заменить подходящие  $n$  ковекторов стандартного базиса в  $\mathbb{k}^{n+1*}$ . Пусть это будут последние  $n$  базисных ковекторов. Коль скоро ковектор  $(1, 0, \dots, 0)$  и ковекторы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  образуют базис, определитель, составленный из строк их координат, отличен от нуля. Раскладывая его по строке  $(1, 0, \dots, 0)$ , видим, что он равен  $A_0$ , откуда  $A_0 \neq 0$ . Если же строки матрицы  $A$  линейно зависимы, то все  $A_i = 0$ .

<sup>1</sup>На самом деле картинку всегда можно нарисовать так, чтобы количества точек пересечения в этих двух случаях равнялись 1 и 0 соответственно

<sup>2</sup>См. лемму 4.2 на стр. 48 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_04.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_04.pdf).

УПР. 8.12. Это вытекает из [прим. 8.6](#) на стр. 136. Полагая в форм. (8-21) на стр. 136  $x = 1, y = t$  и  $B = E$ , получаем разложение

$$\begin{aligned}\det(tE + A) &= t^n + \sum_{m=1}^n t^{n-m} \sum_{\#I=m} a_{II} = \\ &= t^n + t^{n-1} \sum_i a_{ii} + t^{n-1} \sum_{i < j} (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) + \dots + t \sum_i a_{ii} + \det A,\end{aligned}$$

где коэффициент при  $t^{n-k}$  равен сумме определителей всех  $k \times k$  подматриц в  $A$  с главной диагональю, содержащейся в главной диагонали матрицы  $A$ .

УПР. 8.13.  $f(C)g(C) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} C^i A_i C^j B_j = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} C^{i+j} A_i B_j = \sum_{k=0}^{m+n} C^k \sum_{i+j=k} A_i B_j = \sum_{k=0}^{m+n} C^k H_k = h(C)$ .

УПР. 8.14. Если  $f = h\varphi, g = h\psi$ , где  $\deg h > 0$ , то  $\deg \varphi < n, \deg \psi < m$  и  $f\psi - g\varphi = 0$ . Если же  $f$  и  $g$  взаимно просты, то из равенства  $fh_1 = -gh_2$  вытекает, что  $g \mid h_1$ , а  $f \mid h_2$ , что невозможно для ненулевых  $h_1, h_2$  с  $\deg h_1 < m$  и  $\deg h_2 < n$ .