

§12. Задание групп образующими и соотношениями

12.1. Свободные группы и соотношения. С любым множеством M можно связать группу F_M , которая называется *свободной группой*, порождённой множеством M . Она состоит из классов эквивалентных слов, которые можно написать буквами x и x^{-1} , где $x \in M$, по наименьшему отношению эквивалентности, отождествляющему между собою слова, отличающиеся друг от друга вставкой или удалением¹ двубуквенного фрагмента xx^{-1} или $x^{-1}x$. Композиция определяется как приписывание одного слова к другому. Единицей служит класс пустого слова. Обратным к классу слова $w = x_1 \dots x_m$ является класс слова $w^{-1} = x_m^{-1} \dots x_1^{-1}$, где каждая из букв x_i равна x или x^{-1} для некоторого $x \in M$, и $(x^{-1})^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} x$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.1. Убедитесь, что композиция корректно определена на классах эквивалентности слов и что в каждом классе содержится ровно одно *несократимое*² слово, которое одновременно является и самым коротким словом в своём классе.

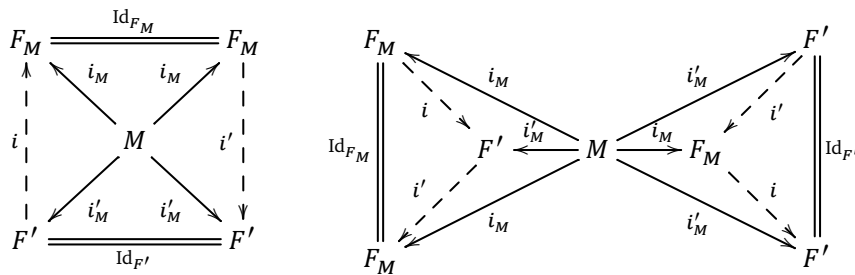
Элементы множества M называются *образующими* свободной группы F_M . Свободная группа с k образующими обозначается F_k . Группа $F_1 \simeq \mathbb{Z}$ — это циклическая группа бесконечного порядка. Группа F_2 классов слов на четырёхбуквенном алфавите x, y, x^{-1}, y^{-1} уже трудно обозрима.

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Постройте инъективный гомоморфизм групп $F_{\mathbb{N}} \hookrightarrow F_2$.

Предложение 12.1 (универсальное свойство свободных групп)

Отображение $i_M : M \rightarrow F_M$, переводящее элемент $x \in M$ в класс однобуквенного слова $x \in F_M$, обладает следующим универсальным свойством: для любых группы G и отображения множеств $\varphi_M : M \rightarrow G$ существует единственный такой гомоморфизм групп $\varphi : F_M \rightarrow G$, что $\varphi_M = \varphi \circ i_M$. Для любого обладающего этим свойством отображения $i'_M : M \rightarrow F'$ множества M в группу F' имеется единственный такой изоморфизм групп $i' : F_M \rightarrow F'$, что $i'_M = i' \circ i_M$.

Доказательство. Гомоморфизм φ единствен, так как обязан переводить слово $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_m^{\varepsilon_m} \in F_M$, где $x_v \in M$, $\varepsilon_v = \pm 1$, в произведение $\varphi_M(x_1)^{\varepsilon_1} \dots \varphi_M(x_m)^{\varepsilon_m} \in G$. С другой стороны, это правило корректно задаёт гомоморфизм групп, что доказывает первое утверждение. Если отображение $i' : M \rightarrow F'$ множества M в группу F' обладает универсальным свойством из [предл. 12.1](#), то существуют единственные гомоморфизмы $i' : F_M \rightarrow F'$ и $i : F' \rightarrow F_M$, встраивающиеся в коммутативные диаграммы



Разложения вида $i_M = \varphi \circ i_M$, $i'_M = \psi \circ i'_M$ в силу их единственности возможны только с $\varphi = \text{Id}_{F_M}$, $\psi = \text{Id}_{F'}$. Поэтому $i' \circ i = \text{Id}_{F'}$, $i \circ i' = \text{Id}_{F_M}$. □

¹ В начале, в конце, или же между произвольными двумя последовательными буквами слова.

² Т. е. не содержащее двубуквенных фрагментов xx^{-1} и $x^{-1}x$.

12.1.1. Задание групп образующими и соотношениями. Если гомоморфизм групп

$$\varphi : F_M \twoheadrightarrow G, \quad (12-1)$$

заданный отображением $\varphi_M : M \rightarrow G$ множества M в группу G , является *сюръективным*, то говорят, что группа G порождается элементами $g_m = \varphi_M(m)$, $m \in M$, а сами элементы g_m называются *образующими* группы G . В этом случае G исчерпывается всевозможными произведениями $g_1^{\varepsilon_1} \dots g_k^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon = \pm 1$, образующих и обратных к ним элементов. Группа G называется *конечно порождённой*, если она допускает конечное множество образующих. Ядро $\ker \varphi \triangleleft F_M$ эпиморфизма (12-1) называется *группой соотношений* между образующими g_m . Набор слов $R \subset \ker \varphi$ называется набором *определяющих соотношений*, если $\ker \varphi$ — это наименьшая нормальная подгруппа в F_M , содержащая R . Это означает, что любое соотношение можно получить из слов множества R конечным числом умножений, обращений и сопряжений произвольными элементами из свободной группы F_M . Группа, допускающая конечное число образующих с конечным набором определяющих соотношений называется *конечно определённой*.

Всякую группу можно задать образующими и соотношениями, например, взяв в качестве M множество всех элементов группы. Удачный выбор образующих с простыми определяющими соотношениями может значительно прояснить устройство группы и её гомоморфизмов в другие группы. Однако в общем случае выяснить, изоморфны ли две группы, заданные своими образующими и определяющими соотношениями, или отлична ли группа, заданная образующими и соотношениями, от тривиальной группы $\{e\}$, может оказаться очень непросто. Более того, обе эти задачи являются *алгоритмически неразрешимыми*¹ даже в классе конечно определённых групп.

Предложение 12.2

Пусть группа G_1 задана множеством образующих M и набором определяющих соотношений R , а G_2 — произвольная группа. Отображение $\varphi : M \rightarrow G_2$ тогда и только тогда корректно задаёт гомоморфизм групп $G_1 \rightarrow G_2$ правилом $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_m^{\varepsilon_m} \mapsto \varphi(x_1)^{\varepsilon_1} \dots \varphi(x_m)^{\varepsilon_m}$, когда для каждого слова $y_1^{\varepsilon_1} \dots y_m^{\varepsilon_m} \in R$ в группе G_2 выполняется соотношение $\varphi(y_1)^{\varepsilon_1} \dots \varphi(y_m)^{\varepsilon_m} = 1$.

Доказательство. Отображения множеств $\varphi_M : M \rightarrow G_2$ биективно соответствуют гомоморфизмам групп $\varphi : F_M \rightarrow G_2$. Такой гомоморфизм φ факторизуется до гомоморфизма из группы $G_1 = F_M/N_R$, где $N_R \triangleleft F_M$ — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая R , тогда и только тогда, когда $N_R \subset \ker \psi$. Так как $\ker \psi \triangleleft F_M$, для этого необходимо и достаточно включения $R \subset \ker \psi$. \square

Пример 12.1 (образующие и соотношения группы диэдра)

Покажем, что группа диэдра D_n задаётся двумя образующими x_1, x_2 и соотношениями

$$x_1^2 = x_2^2 = (x_1 x_2)^n = e. \quad (12-2)$$

Оси симметрии правильного n -угольника разбивают его на $2n$ конгруэнтных прямоугольных треугольников как на [рис. 12♦1](#) ниже. Обозначим один из них через e . Поскольку любое движение плоскости однозначно задаётся своим действием на треугольник e , треугольники разбиения находятся в биекции с движениями $g \in D_n$, и каждый из них можно однозначно пометить

¹В формальном смысле, принятом в математической логике.

тем единственным преобразованием g , которое переводит треугольник e в этот треугольник. При этом каждое преобразование $h \in D_n$ переводит каждый треугольник g в треугольник hg .

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Для любого движения F евклидова пространства \mathbb{R}^n и отражения σ_π в произвольной гиперплоскости $\pi \subset \mathbb{R}^n$ докажите соотношения

$$\sigma_{F(\pi)} = F \circ \sigma_\pi \circ F^{-1} \quad \text{и} \quad \sigma_{F(\pi)} \circ F = F \circ \sigma_\pi. \quad (12-3)$$

Обозначим через ℓ_1 и ℓ_2 боковые стороны треугольника e , а отражения плоскости в этих сторонах обозначим через $\sigma_1 = \sigma_{\ell_1}$ и $\sigma_2 = \sigma_{\ell_2}$. Тогда по второму из равенств (12-3) треугольники, получающиеся из e последовательными отражениями в направлении часовой стрелки пометятся элементами

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell_1} &= \sigma_1, \\ \sigma_{\sigma_1(\ell_2)}\sigma_1 &= \sigma_1\sigma_2, \\ \sigma_{\sigma_1\sigma_2(\ell_1)}\sigma_1\sigma_2 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1, \\ \sigma_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\ell_2)}\sigma_1\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \dots \end{aligned}$$

а треугольники, получающиеся из e последовательными отражениями против часовой стрелки пометятся элементами

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell_2} &= \sigma_2, \\ \sigma_{\sigma_2(\ell_1)}\sigma_2 &= \sigma_2\sigma_1, \\ \sigma_{\sigma_2\sigma_1(\ell_2)}\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \\ \sigma_{\sigma_2\sigma_1\sigma_2(\ell_1)}\sigma_2\sigma_1\sigma_2 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1, \dots \end{aligned}$$

В результате каждый треугольник пометится словом вида $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\dots$ или $\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\dots$. Так как композиция $\sigma_1 \circ \sigma_2$ является поворотом на угол $2\pi/n$, в группе D_n выполняются соотношения

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_1\sigma_2)^n = e, \quad (12-4)$$

и правило $x_1 \mapsto \sigma_1, x_2 \mapsto \sigma_2$ корректно задаёт сюръективный гомоморфизм $\varphi: F_2/H \twoheadrightarrow D_n$ из фактора свободной группы F_2 с образующими x_1, x_2 по наименьшей нормальной подгруппе $H \triangleleft F_2$, содержащей слова x_1^2, x_2^2 и $(x_1x_2)^n$. Покажем, что он инъективен. Поскольку последнее соотношение в (12-2) равносильно равенству

$$\underbrace{\sigma_1\sigma_2\sigma_1\dots}_k = \underbrace{\sigma_2\sigma_1\sigma_2\dots}_{2n-k}, \quad (12-5)$$

каждое слово в алфавите $\{x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}\}$ записывается по модулю соотношений (12-2) словом

$$x_1x_2x_1\dots \quad \text{или} \quad x_2x_1x_2\dots \quad (12-6)$$

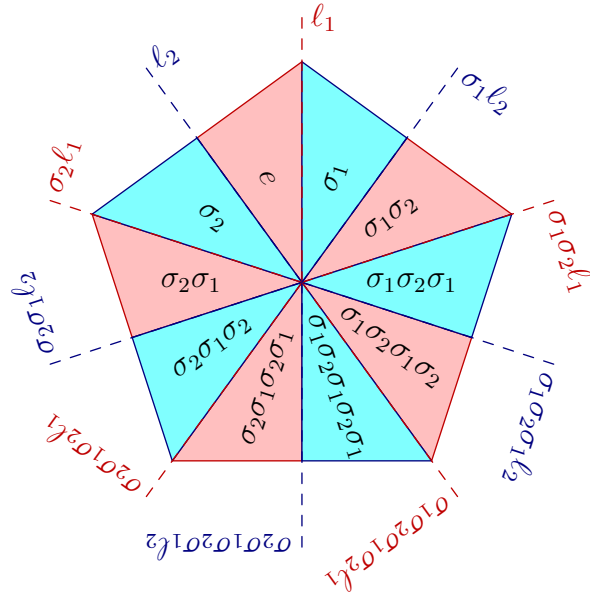


Рис. 12◊1. Образующие группы диэдра.

из не более n букв, причём два n -буквенных слова равны друг другу в F_2/H . Согласно предыдущему, все эти слова переводятся гомоморфизмом φ в разные треугольники, т. е. в разные элементы $g \in D_n$. Мы заключаем, что гомоморфизм $\varphi : F_2/H \rightarrow D_n$ биективен, а все слова (12-6), за исключением двух равных n -буквенных слов, различны по модулю H и являются самими короткими выражениями элементов группы D_n через образующие σ_1, σ_2 .

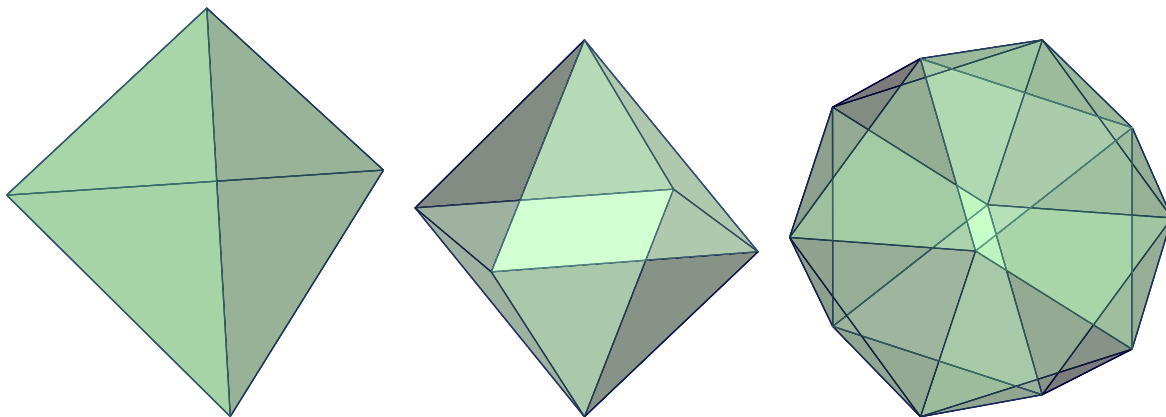


Рис. 12♦2. Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

12.2. Пример: группы платоновых тел. Обозначим через M платоново тело с треугольными гранями, т. е. правильный тетраэдр, октаэдр или икосаэдр, см. рис. 12♦2. Плоскости симметрии многогранника M задают барицентрическое разбиение каждой грани на 6 конгруэнтных друг другу треугольников с вершинами в центре грани, в середине ребра этой грани и в одном из концов этого ребра, см. рис. 12♦3. Обозначим, соответственно, через π_1, π_2, π_3 плоскости симметрии, отсекающие противоположные этим вершинам стороны в одном из треугольников, который пометим единичным элементом e группы O_M многогранника M . Двугранный угол между плоскостями π_i и π_j обозначим через

$$\pi/m_k = \angle(\pi_i, \pi_j), \quad \text{где } k = \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}.$$

Числа m_i , а также число γ граней многогранника M и общее число треугольников $N = 6\gamma$ представлены в таблице¹:

M	m_1	m_2	m_3	γ	N
тетраэдр	3	2	3	4	24
октаэдр	3	2	4	8	48
икосаэдр	3	2	5	20	120

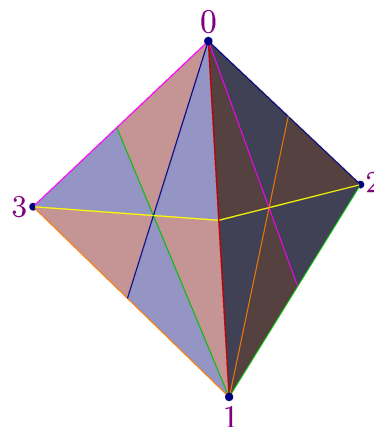


Рис. 12♦3. Барицентрическое разбиение тетраэдра плоскостями симметрии.

Обозначим через σ_i отражение в плоскости π_i . Так как каждое преобразование из группы O_M однозначно определяется своим действием на тройку векторов с концами в вершинах треугольника e , каждый треугольник триангуляции является образом треугольника e под действием единственного преобразования $g \in O_M$. Надпишем каждый треугольник этим преобразованием g ,

¹Обратите внимание, что помещённый в пространство n -угольный диэдр из прим. 12.1 тоже можно включить в этот список со значениями $m_1 = n, m_2 = 2, m_3 = 2, \gamma = 2$ и $N = 4n$, если условиться, что плоский диэдр имеет две двумерные грани: «верхнюю» и «нижнюю».

и пометим его стороны, высекаемые плоскостями $g(\pi_1)$, $g(\pi_2)$, $g(\pi_3)$ соответствующими номерами 1, 2, 3. Отметим, что каждое преобразование $h \in O_M$ переводит каждый треугольник g в треугольник hg . На рис. 12◊4 изображена стереографическая проекция картин, которую 24 трёхгранных угла барицентрического разбиения тетраэдра с рис. 12◊3 высекают на описанной около этого тетраэдра сфере. На каждом сферическом треугольнике написана композиция отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, переводящая треугольник e в этот треугольник. Стороны треугольников, помеченные номерами 1, 2 и 3, изображены на рисунке в красном, зелёном и жёлтом цвете.

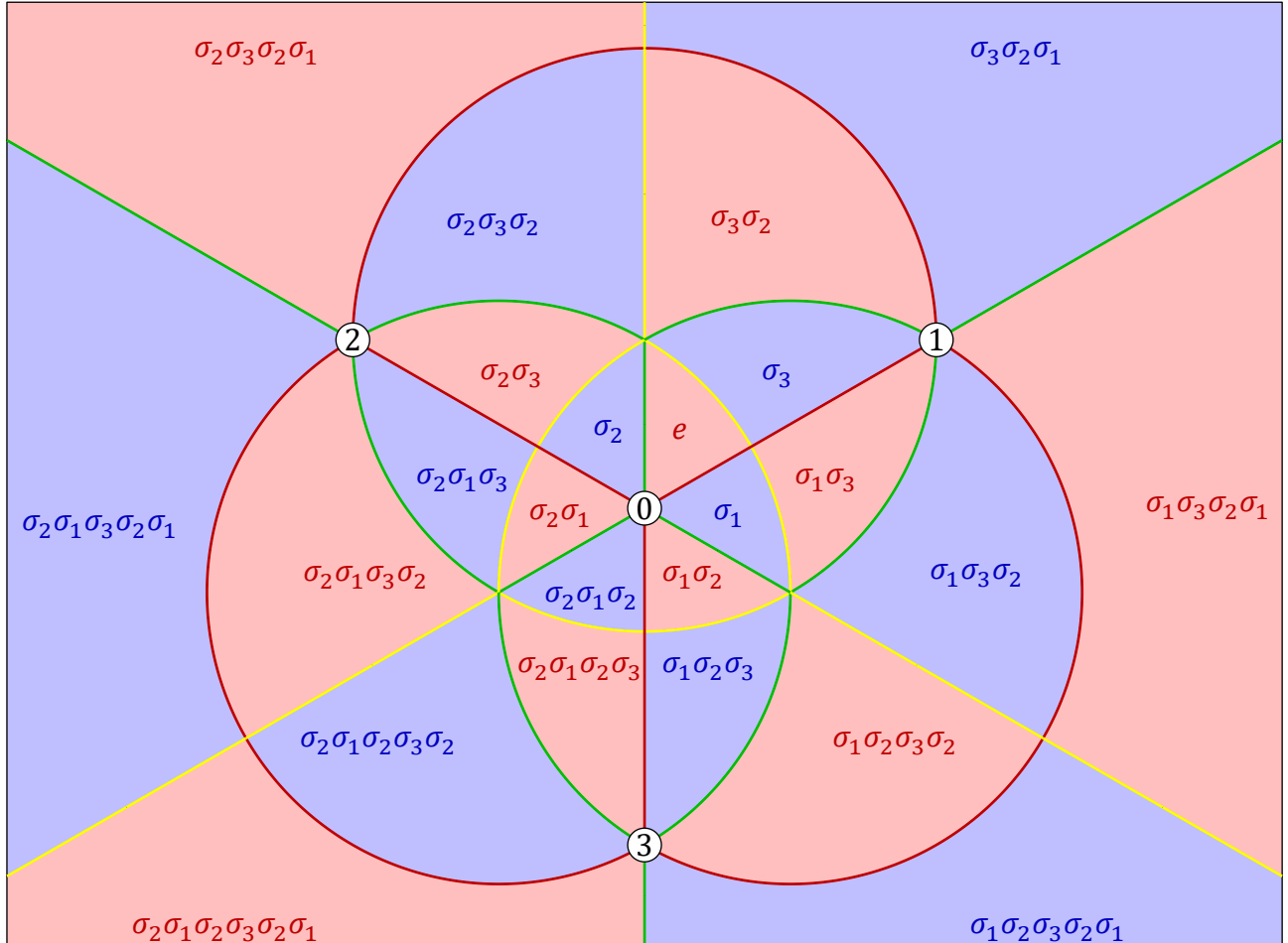


Рис. 12◊4. Триангуляция описанной сферы плоскостями симметрии тетраэдра в стереографической проекции из диаметрально противоположного к вершине «0» полюса сферы на экваториальную плоскость, параллельную грани «123».

Чтобы явно написать композицию отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, переводящую треугольник e в треугольник g , выберем внутри опирающихся на эти треугольники трёхгранных углов векторы u и w с концами на описанной около M сфере так, чтобы $w \neq -u$ и натянутая на них плоскость Π_{uw} не содержала линий пересечения плоскостей симметрии многогранника M . Пройдём из u в w по кратчайшей из двух дуг окружности, высекаемой плоскостью Π_{uw} на описанной около M сфере. Пусть мы при этом последовательно побываем в треугольниках

$$g_1 = e, g_2, g_3, \dots, g_{m+1} = g.$$

Обозначим через $v_i \in \{1, 2, 3\}$ номер, надписанный на той стороне треугольника g_i , сквозь которую осуществляется проход из g_i в g_{i+1} . Это означает, что общая сторона треугольников g_i и g_{i+1} высекается плоскостью $g_i(\pi_{v_i})$, т. е. образом плоскости π_{v_i} при отображении g_i . Тогда

$$g_2 = \sigma_{v_1}, \quad g_3 = \sigma_{g_2(\pi_{v_2})}g_2 = \sigma_{v_1}\sigma_{v_2}, \quad g_4 = \sigma_{g_3(\pi_{v_3})}g_3 = \sigma_{v_1}\sigma_{v_2}\sigma_{v_3}, \dots$$

по второму равенству из форм. (12-3) на стр. 200. Таким образом, последовательность индексов $v_i \in \{1, 2, 3\}$ в разложении $g = \sigma_{v_1} \dots \sigma_{v_m}$ состоит из выписанных по порядку номеров сторон, которые приходится пересекать по пути из $e = g_1$ в $g = g_{m+1}$ по дуге uw , как на рис. 12♦5, где стороны с номерами 1, 2, 3 изображены соответственно красным, зелёным и жёлтым цветами. Отметим, что полученное нами разложение элемента $g \in O_M$ в композицию отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не единственно и зависит от выбора векторов u и w внутри трёхгранных углов e и g . При изменении любого из этих векторов последовательность v_1, \dots, v_m номеров зеркал, пересекаемых по дороге из u в w , не меняется до тех пор, пока натянутая на эти векторы плоскость Π_{uw} не натолкнётся на линию пересечения зеркал, а в момент пересечения такой линии в последовательности v_1, \dots, v_m некоторый фрагмент вида $\sigma_i\sigma_j\sigma_i\sigma_j \dots$ длины m_k заменяется симметричным фрагментом $\sigma_j\sigma_i\sigma_j\sigma_i \dots$ той же самой длины m_k , как показано на рис. 12♦5.

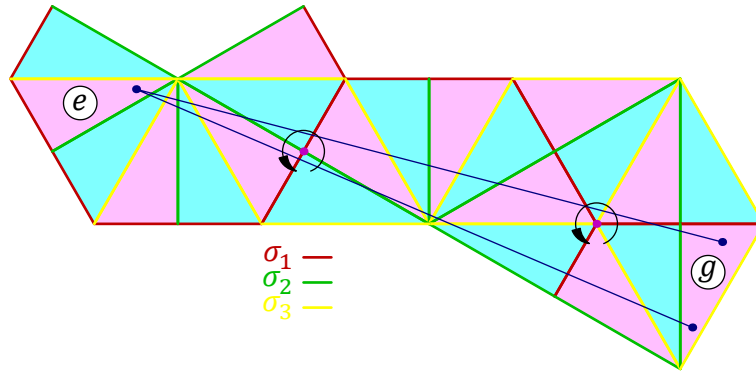


Рис. 12♦5. $\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = g = \sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_2$.

Разложения, отвечающие верхней и нижней траекториям на рис. 12♦5 отличаются друг от друга тем, что линии пересечения зеркал обходятся в противоположных направлениях. Композиции возникающих при этом отражений удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma_1\sigma_3\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_3$$

той же самой природы, что соотношения (12-4) в группе диэдра: так как композиция отражений $\sigma_i \circ \sigma_j$ является поворотом вокруг прямой $\pi_i \cap \pi_j$ на угол $2\pi/m_k$, равный удвоенному углу между плоскостями π_i и π_j , в группе O_M выполняются соотношения $\sigma_i^2 = e$ и $(\sigma_i\sigma_j)^{m_k} = e$, где тройка (i, j, k) пробегает три циклические перестановки номеров $(1, 2, 3)$.

Отсюда вытекает, во-первых, что длина представления $g = \sigma_{v_1} \dots \sigma_{v_m}$, считанного вдоль кратчайшей из двух дуг, соединяющих векторы u и w , не зависит от выбора этих векторов внутри трёхгранных углов, опирающихся на треугольники e и g , при условии, что плоскость Π_{uw} не проходит через линии пересечения зеркал, а во-вторых, что правило $x_i \mapsto \sigma_i$ задаёт сюръективный гомоморфизм $\varphi: F_3/H \twoheadrightarrow O_M$ из фактора свободной группы F_3 с образующими x_1, x_2, x_3 по наименьшей нормальной подгруппе $H \triangleleft F_3$, содержащей шесть слов

$$x_i^2 \quad \text{и} \quad (x_i x_j)^{m_k}. \quad (12-7)$$

Докажем, что этот гомоморфизм инъективен. Для этого индукцией по $k \in \mathbb{N}$ установим, что каждый элемент $y \in F_3/H$, представимый в F_3 словом из $\leq k$ букв, — это единственный среди представимых словами из $\leq k$ букв элемент группы F_3/H , переводимый гомоморфизмом φ в треугольник $g = \varphi(y)$, причём представления $y = x_{v_1} \dots x_{v_m}$, считанные со всевозможных кратчайших дуг, соединяющих треугольник e с треугольником $g = \varphi(y)$ так, как это объяснялось выше, являются самыми короткими по модулю соотношений (12-7) представлениями элемента $y \in F_3/H$.

Для представимых однобуквенными словами элементов $y = x_1, x_2, x_3$ это очевидно. Пусть это так для всех $y \in F_3/H$, представимых словами из $\leq k$ букв. Рассмотрим в F_3/H элемент, представимый словом из $k+1$ букв и не представимый более коротким словом. Он имеет вид ux_j , где $j = 1, 2, 3$, а u представляется словом длины $\leq k$. Пусть $g = \varphi(u)$ и $h = \varphi(ux_j) = g\sigma_j$. Выберем в треугольниках e и g векторы $u \in e$ и $w \in g$ так, чтобы окружность, высекаемая из сферы плоскостью Π_{uw} , пересекала плоскость $H = g(\pi_j)$. Кратчайшая дуга этой окружности, ведущая из u в w , либо не пересекает плоскость H , как на рис. 12◊6, либо пересекает, как на рис. 12◊7.

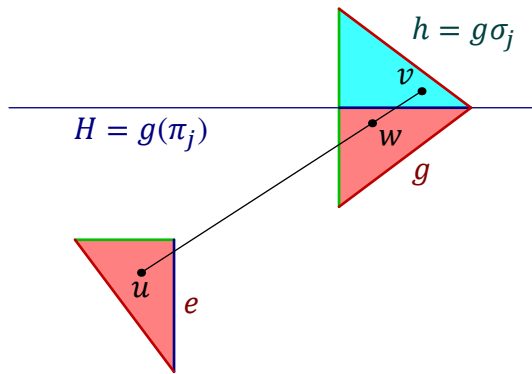


Рис. 12◊6. H не разделяет e и g .

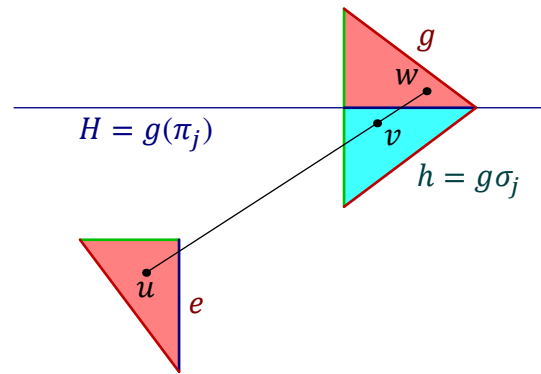


Рис. 12◊7. H разделяет e и g .

Во втором случае обозначим через v какую-нибудь точку дуги $[u, w]$, лежащую в предыдущем треугольнике $\sigma_{g(\pi_j)}g = g\sigma_jg^{-1}g = g\sigma_j = h$. По предположению индукции, одно из минимальных по длине представлений $y = x_{v_1} \dots x_{v_m}$ имеет в качестве v_1, \dots, v_m номера последовательных рёбер, которые приходится пересекать по пути из u в w по дуге $[u, w]$, и его длина $m \leq k$. В частности, последняя буква $x_{v_m} = x_j$. Поэтому элемент $ux_j = x_{v_1} \dots x_{v_{m-1}}$ записывается более коротким, чем y , словом из $< k$ букв, вопреки нашему предположению. Таким образом, имеет место первый случай, изображённый на рис. 12◊6. Обозначим через $v \in h$ какой-нибудь вектор, лежащий на продолжении дуги $[u, w]$ за точку w . По предположению индукции, одно из минимальных по количеству букв представлений $y = x_{v_1} \dots x_{v_m}$ имеет в качестве v_1, \dots, v_m номера последовательных рёбер, которые приходится пересекать по пути из u в w по дуге $[u, w]$, и его длина $m \leq k$. При этом $h = \varphi(ux_j) = g\sigma_j = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}\sigma_j$, и представление $ux_j = x_{v_1} \dots x_{v_m}x_j$ по нашему предположению состоит, как минимум, из $k+1$ букв. Мы заключаем, что $m = k$, представление $ux_j = x_{v_1} \dots x_{v_k}x_j$ является одним из кратчайших для элемента ux_j и считывается с дуги $[u, v]$. В частности, элемент ux_j однозначно восстанавливается по треугольнику $h = \varphi(ux_j)$, что воспроизводит индуктивное предположение. Мы получили следующий результат.

Предложение 12.3

Полная группа O_M платонова тела M с треугольными гранями порождается тремя элементами x_1, x_2, x_3 , связанными шестью определяющими соотношениями $x_i^2 = e$ и $(x_i x_j)^{m_k} = e$. \square

12.3. Образующие и соотношения симметрической группы S_{n+1} . Обозначим числами от 0 до n концы стандартных базисных векторов e_0, e_1, \dots, e_n в \mathbb{R}^{n+1} и рассмотрим n -мерный правильный симплекс $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с вершинами в этих точках. Поскольку каждое аффинное преобразование n -мерной гиперплоскости $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$, в которой лежит симплекс Δ , однозначно задаётся своим действием на вершины симплекса Δ , полная группа O_Δ симплекса Δ изоморфна симметрической группе S_{n+1} перестановок его вершин $0, 1, \dots, n$. Каждая k -мерная грань симплекса Δ является правильным k -мерным симплексом и представляет собою выпуклую оболочку каких-либо $k+1$ вершин симплекса Δ , и наоборот, выпуклая оболочка $[i_0, i_1, \dots, i_k]$ любых $k+1$ различных вершин $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ является k -мерной гранью симплекса Δ . Симплекс Δ симметричен относительно $n(n+1)/2$ гиперплоскостей π_{ij} , проходящих через середину ребра $[i, j]$ и противоположащую этому ребру грань коразмерности 2, содержащую вершины $\{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$. Гиперплоскость π_{ij} перпендикулярна вектору $e_i - e_j$ и отражение $\sigma_{ij} \in O_\Delta$ в этой гиперплоскости отвечает транспозиции элементов i и j в симметрической группе S_{n+1} .

УПРАЖНЕНИЕ 12.4. Убедитесь, что гиперплоскости π_{ij} и π_{km} с $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$ ортогональны, а гиперплоскости π_{ij} и π_{jk} с различными i, j, k пересекаются под углом $\pi/3 = 60^\circ$.

Плоскости π_{ij} осуществляют *барицентрическое разбиение* симплекса Δ на $(n+1)!$ меньших симплексов с вершинами в центрах граней симплекса Δ и в центре самого симплекса. Если обозначить через $\langle i_0 i_1 \dots i_m \rangle$ центр m -мерной грани с вершинами в i_0, i_1, \dots, i_m , то каждый симплекс барицентрического разбиения будет иметь одну из вершин в какой-либо вершине $\langle i_0 \rangle$ симплекса Δ , следующую вершину — в центре $\langle i_0 i_1 \rangle$ какого-либо примыкающего к вершине i_0 ребра $[i_0, i_1]$, следующую вершину — в центре $\langle i_0 i_1 i_2 \rangle$ какой-либо примыкающей к ребру $[i_0, i_1]$ двумерной треугольной грани $[i_0, i_1, i_2]$ и т. д. вплоть до центра $\langle i_0 i_1 \dots i_n \rangle$ самого симплекса Δ . Эти симплексы находятся в естественной биекции с перестановками $g \in S_{n+1}$: симплекс

$$g = [\langle g_0 \rangle, \langle g_0 g_1 \rangle, \langle g_0 g_1 g_2 \rangle, \dots, \langle g_0 g_1 \dots g_{n-1} \rangle, \langle g_0 g_1 \dots g_n \rangle] \quad (12-8)$$

является образом начального симплекса

$$e = [\langle 0 \rangle, \langle 01 \rangle, \langle 012 \rangle, \dots, \langle 0, 1, \dots, n-1 \rangle, \langle 0, 1, \dots, n \rangle] \quad (12-9)$$

под действием единственной перестановки $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in S_{n+1} = O_M$. Спроектируем поверхность симплекса Δ из его центра на описанную сферу. Получим разбиение $(n-1)$ -мерной сферы S^{n-1} на $(n+1)!$ конгруэнтных друг другу $(n-1)$ -мерных симплексов, надписанных элементами $g \in S_{n+1}$. Грани этих симплексов высекаются из сферы гиперплоскостями π_{ij} . При $n=3$ получится представленная на рис. 12.4 на стр. 202 триангуляция двумерной сферы S^2 двадцатью четырьмя сферическими треугольниками с углами $\pi/3$, $\pi/3$ и $\pi/2$. Помеченному тождественным преобразованием e начальному симплексу (12-9) отвечает сферический симплекс, высекаемый из сферы n гиперплоскостями $\pi_i \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{i-1, i}$ с $1 \leq i \leq n$. Обозначим через $\sigma_i = \sigma_{i-1, i}$ отражения в этих гиперплоскостях. В симметрической группе S_{n+1} этим отражениям отвечают транспозиции $|i-1, i\rangle$ пар соседних элементов. По упр. 12.4 они удовлетворяют соотношениям¹

$$\sigma_i^2 = e, \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{и} \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{где} \quad |i-j| \geq 2. \quad (12-10)$$

¹Соотношение $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ является более употребительной в данном контексте записью циклического соотношения $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = e$ на поворот $\sigma_i \sigma_{i+1}$ на 120° вокруг $(n-2)$ -мерного подпространства $\pi_i \cap \pi_{i+1}$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.5. Убедитесь напрямую, что транспозиции $\sigma_i = |i-1, i\rangle \in S_{n+1}$ удовлетворяют соотношениям (12-10).

В силу этих соотношений, гомоморфизм свободной группы F_n с образующими x_1, \dots, x_n , переводящий x_i в σ_i , корректно факторизуется до гомоморфизма $\varphi: F_n/H \rightarrow S_{n+1}$, где $H \triangleleft F_n$ — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая слова

$$x_i^2, (x_i x_{i+1})^3 \text{ и } (x_i x_j)^2, \text{ где } |i-j| \geq 2. \quad (12-11)$$

Чтобы убедиться в его сюръективности, выберем в симплексах e и g точки a и b так, чтобы они не были диаметрально противоположны и соединяющая их геодезическая¹ не пересекала граней коразмерности² 2. Пройдя из a в b по этой геодезической, мы получим разложение

$$g = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}, \quad (12-12)$$

в котором каждое $i_v \in \{1, \dots, n\}$ равно номеру такого зеркала π_{i_v} , что переход из v -того встреченного по дороге симплекса g_v в следующий симплекс³ g_{v+1} осуществляется через грань, высекаемую гиперплоскостью $g_v(\pi_{i_v})$. Дословно также, как и в н° 12.2, проверяется, что длина представления (12-12), полученного с помощью дуги $[a, b]$ не зависит от выбора её концов $a \in e$ и $b \in g$ при условии, что они не диаметрально противоположны и плоскость π_{ab} не проходит через пересечения зеркал π_{ij} : если при перемещении точек a и b внутри симплексов e и g дуга $[a, b]$ пройдёт через пересечение $g_k(\pi_i \cap \pi_j)$ перпендикулярных гиперграней $g_k(\pi_i)$, $g_k(\pi_j)$ с $|i-j| \geq 2$, или через пересечение $g_k(\pi_i \cap \pi_{i+1})$ гиперграней $g_k(\pi_i)$, $g_k(\pi_{i+1})$, пересекающихся под углом 60° , то в представлении $g = \sigma_1 \dots \sigma_m$ стоящий на k -том месте фрагмент $\sigma_i \sigma_j$ или $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ заменится, соответственно, равным ему в группе O_Δ фрагментом $\sigma_j \sigma_i$ или $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$. В ортогональной проекции вдоль $(n-2)$ -мерного подпространства $g_k(\pi_i \cap \pi_j)$ или $g_k(\pi_i \cap \pi_{i+1})$ на ортогональную ему двумерную плоскость мы при этом увидим картину вроде показанной на рис. 12♦5 на стр. 203. Точно такая же, как в н° 12.2, индукция по $k \in \mathbb{N}$ показывает, что каждый элемент $y \in F_n/H$, представимый по модулю соотношений (12-11) словом из $\leq k$ букв, является единственным среди представимых словами из $\leq k$ букв элементом, который переводится гомоморфизмом φ в симплекс $g = \varphi(y)$, и слова $x_{i_1} \dots x_{i_k} \in F_n$, считанные с соединяющих симплекс e с симплексом $g = \varphi(y)$ геодезических, являются кратчайшими по модулю соотношений (12-11) записями элемента $y \in F_n/H$. Таким образом, симметрическая группа S_{n+1} порождается n образующими x_i , $1 \leq i \leq n$, связанными определяющими соотношениями (12-11).

Эту геометрическую картину нетрудно выхолостить до сугубо комбинаторного рассуждения, представленного в следующем разделе.

12.4. Порядок Брюа на симметрической группе S_{n+1} . Напомню⁴, что длиной $\ell(g)$ перестановки $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in S_{n+1}$ называется количество всех её инверсных пар⁵. Правое умножение перестановки g на транспозицию $\sigma_i = |i-1, i\rangle$ приводит к перестановке $g\sigma_i$, отличающейся от g транспозицией $(i-1)$ -того и i -го символов g_{i-1} и g_i :

$$(g_0, \dots, g_{i-2}, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n) \circ \sigma_i = (g_0, \dots, g_{i-2}, g_i, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n),$$

¹Кратчайшая из двух дуг ab большой окружности, высекаемой из сферы двумерной плоскостью, проходящей через точки a , b и центр сферы.

²Т. е. пересечений всевозможных пар зеркал π_{ij} .

³Напомню, что при этом $g_v = \sigma_1 \dots \sigma_{v-1}$, $g_{v+1} = \sigma_{g_v(\pi_{i_v})} g_v = g_v \sigma_{i_v}$.

⁴См. н° 8.1 на стр. 127.

⁵Т. е. таких пар $1 \leq i < j \leq n$, что $g_i > g_j$.

причём $\ell(g\sigma_i) = \ell(g) + 1$, если $g_{i-1} < g_i$, и $\ell(g\sigma_i) = \ell(g) - 1$, если $g_{i-1} > g_i$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.6. Убедитесь, что любая перестановка g длины $\ell(g) = m$ может быть записана таким словом $g = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$, что $\ell(\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}) = \ell(\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{k-1}}) + 1$ при всех $2 \leq k \leq m$.

Частичный порядок на S_{n+1} , в котором $g < h$, если $h = g\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_s}$, где

$$\ell(g\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}) = \ell(g\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{k-1}}) + 1 \text{ при всех } 1 \leq k \leq s,$$

называется *порядком Брюа*.

Слово $w = x_{i_1} \dots x_{i_m}$ в свободной группе F_n с образующими x_1, \dots, x_n называется *минимальным словом* перестановки $g \in S_{n+1}$, если $m = \ell(g)$ и $g = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$. Начальные фрагменты минимального слова задают строго возрастающую в смысле порядка Брюа последовательность элементов $h_v = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_v} \in S_{n+1}$. Перестановка g может иметь много разных минимальных слов, однако не может быть записана никаким более коротким словом.

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим гомоморфизм $\varphi : F_n \rightarrow S_{n+1}$, $x_i \mapsto \sigma_i$.

Предложение 12.4

По модулю соотношений $x_i^2 = e$, $x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}$ и $x_i x_j = x_j x_i$, где $|i - j| \geq 2$, каждое слово $w \in F_n$ эквивалентно некоторому минимальному слову перестановки $\varphi(w) \in S_{n+1}$, а все минимальные слова перестановки $\varphi(w)$ эквивалентны между собой.

Доказательство. Индукция по количеству букв в слове $w \in F_{n-1}$. Для $w = \emptyset$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для всех слов из $\leq t$ букв. Достаточно для каждого t -буквенного слова w и каждой буквы x_v проверить предложение для слова wx_v . Если слово w не является минимальным словом элемента $g = \varphi(w)$, то оно эквивалентно более короткому минимальному слову. Тогда и wx_v эквивалентно более короткому слову, и предложение справедливо по индукции. Поэтому мы будем далее считать, что слово w является минимальным словом элемента $g = \varphi(w) = (g_0, g_1, \dots, g_n)$. Возможны два случая: либо $g_{v-1} > g_v$, либо $g_{v-1} < g_v$. В первом случае у перестановки g есть минимальное слово вида ux_v , по предположению индукции эквивалентное слову w . Тогда $wx_v \sim ux_v x_v \sim u$ и элемент $\varphi(wx_v) = \varphi(u)$ является образом более короткого, чем w слова u , эквивалентного слову wx_v . По индукции, слово u эквивалентно минимальному слову элемента $\varphi(wx_v)$ и все такие слова эквивалентны друг другу. Поэтому то же верно и для эквивалентного u слова wx_v .

Остаётся рассмотреть случай $g_{v-1} < g_v$. Здесь $\ell(g\sigma_v) = \ell(g) + 1$ и слово wx_v является минимальным словом для элемента $\varphi(wx_v)$. Мы должны показать, что любое другое минимальное слово w' этого элемента эквивалентно wx_v . Для самой правой буквы слова w' есть 3 возможности: либо она равна x_v , либо она равна $x_{v\pm 1}$ либо она равна x_μ с $|\mu - v| \geq 2$. В первом случае $w' = ux_v$, где u , как и w , является минимальным словом элемента g . По индукции $u \sim w$, а значит, и $w' = ux_k \sim wx_k$.

Пусть теперь $w' = ux_{v+1}$. Поскольку оба слова wx_v и ux_{v+1} минимальны для перестановки $h = \varphi(wx_v) = \varphi(ux_{v+1})$, в перестановке h на местах с номерами $v-1, v, v+1$ стоят числа $g_v > g_{v-1} > g_{v+1}$, а в перестановке $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) = \varphi(w)$ на этих же местах — числа $g_{v-1} < g_v > g_{v+1}$, где $g_{v-1} > g_{v+1}$. Поэтому у перестановки h имеется минимальное слово вида $sx_{v+1}x_vx_{v+1}$, а у перестановки g — минимальное слово вида tx_vx_{v+1} . Перестановка $h' = \varphi(s) = \varphi(t)$ отличается от h тем, что числа на местах с номерами $v-1, v, v+1$ в ней возрастают и равны $g_{v+1} < g_{v-1} < g_v$. Поскольку $\ell(h') = \ell(h) - 3 = \ell(g) - 2$, оба слова t и s минимальны для h' и по индукции эквивалентны. Кроме того, по индукции $w \sim tx_vx_{v+1}$. Поэтому

$$wx_v \sim tx_vx_{v+1}x_v \sim sx_vx_{v+1}x_v \sim sx_{v+1}x_vx_{v+1}.$$

Но $sx_{v+1}x_v \sim u$, поскольку оба слова минимальны для одной и той же перестановки¹ длины $m = \ell(h) - 1$. Таким образом, $wx_v \sim ux_{v+1}$. Случай $w' = ux_{v-1}$ полностью симметричен.

Наконец, пусть $h = \varphi(wx_v) = \varphi(ux_\mu)$, где $|\mu - v| \geq 2$. Тогда в h есть два непересекающихся фрагмента $g_{v-1} > g_v$ и $g_{\mu-1} > g_\mu$. Поэтому у h есть минимальные слова вида $tx_\mu x_v$ и вида $sx_v x_\mu$, где t и s являются минимальными словами для перестановки $\varphi(t) = \varphi(s)$, отличающейся от h тем, что рассматриваемые 2 фрагмента в ней имеют вид $g_v < g_{v-1}$ и $g_\mu < g_{\mu-1}$. Так как длина этой перестановки равна $\ell(h) - 2 = m - 1$, по индукции $t \sim s$. Поскольку tx_μ — минимальное слово для g , по индукции $w \sim tx_\mu$. Аналогично, т. к. sx_v и u — минимальные слова для перестановки $\varphi(sx_v) = \varphi(u)$, отличающейся от h' транспозицией первого из двух фрагментов и потому имеющей длину $\ell(h) - 1 = m$, по индукции $sx_v \sim u$. Таким образом, $wx_v \sim tx_\mu x_v \sim sx_\mu x_v \sim sx_v x_\mu \sim ux_\mu$, что и требовалось. \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.7. Убедитесь, что $h \leq g$ в смысле порядка Брюа если и только если в симплексах e, h, g из н° 12.3 можно выбрать такие точки a, b, c , что длина геодезической дуги $[ac]$ меньше π и $b \in [ac]$.

¹ Она отличается от g, h и h' тем, что числа в позициях с номерами $v - 1, v, v + 1$ в ней упорядочены как $g_v > g_{v+1} < g_{v-1}$, где $g_v > g_{v-1}$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 12.1. Первое очевидно, второе вытекает из того, что при вставке фрагмента $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ в произвольное слово w получится такое слово, в котором сокращение любого фрагмента вида $y^\varepsilon y^{-\varepsilon}$ приведёт либо обратно¹ к слову w , либо к слову, получающемуся из w сначала сокращением того же самого фрагмента $y^\varepsilon y^{-\varepsilon}$, а уже затем вставкой $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ в то же самое место, что и в w .
- Упр. 12.2. Отобразите $n \in \mathbb{N}$ в $x^n u x^n \in F_2$ и воспользуйтесь [предл. 12.1](#) на стр. 198.
- Упр. 12.3. Поскольку отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ биективно, достаточно убедиться, что отображения $\sigma_{F(\pi)}$ и $F \circ \sigma_\pi \circ F^{-1}$ одинаково действуют на точку вида $F(p)$ с произвольным $p \in \mathbb{R}^n$.
- Упр. 12.4. Обозначим через v_i вектор, идущий из центра симплекса Δ в вершину i . Вектор $n_{ij} = v_i - v_j$ ортогонален гиперплоскости π_{ij} , поскольку для любого $k \neq i, j$ скалярное произведение $(n_{ij}, v_k - (v_i + v_j)/2) = (v_i, v_k) - (v_j, v_k) + (v_i, v_i)/2 - (v_j, v_j)/2 = 0$, т. к. все произведения (v_i, v_j) с $i \neq j$ и все скалярные квадраты (v_i, v_i) одинаковы. Аналогичная выкладка показывает, что при $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset$ векторы n_{ij} и n_{km} ортогональны. Векторы $v_i - v_k$ и $v_k - v_j$ образуют в натянутой на них двумерной плоскости стороны правильного треугольника с вершинами в концах векторов v_i, v_j и v_k , и угол между ними равен 60° .

¹Обратите внимание, что такое происходит не только при сокращении того же самого фрагмента $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$, который был перед этим вставлен, но и при сокращении одной из букв $x^{\pm\varepsilon}$ с её соседкой.