§13. Тензорные произведения

Всюду в этом параграфе мы обозначаем через K произвольное коммутативное кольцо с единицей, а через $\Bbbk$ — произвольное поле.

13.1. Тензорное произведение модулей. Напомню[1], что множество векторов E в модуле V над коммутативным кольцом K называется *базисом* этого модуля над K, если каждый вектор $v \in V$ допускает единственное разложение $v = \sum_{e \in E} x_e e$, в котором коэффициенты $x_e \in K$ отличны от нуля только для конечного числа векторов e. Например, мономы x^k с целыми неотрицательными k образуют базис модуля многочленов $K[x]$, но не образуют базиса в модуле степенных рядов $K\llbracket x \rrbracket$. Мы говорим, что множество векторов $B \subset V$ линейно порождает V над K, если каждый вектор из V является *конечной* линейной комбинацией векторов из B, а линейная зависимость множества векторов $M \subset V$ означает, что некоторая *конечная* линейная комбинация этих векторов с ненулевыми коэффициентами равна нулю в V.

Говоря вольно, тензорное произведение модулей $V_1, \dots, V_n$ — это K-линейная оболочка формальных произведений $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ всевозможных векторов $v_i \in V_i$, а все линейные соотношения между такими произведениями порождаются соотношениями дистрибутивности

$$\dots \otimes (xu + yw) \otimes \dots = x \cdot (\dots \otimes u \otimes \dots) + y \cdot (\dots \otimes w \otimes \dots), \tag{13-1}$$

где $x, y \in K$, $u, w \in V_i$ и обозначенные многоточиями соответственные сомножители в левой и правой частях одинаковы. Формализуется это следующим образом.

Обозначим через $\mathcal{V}$ свободный K-модуль, базисом которого являются всевозможные n-буквенные слова $[v_1 \dots v_n]$, где в качестве i-той буквы может выступать любой вектор $v_i \in V_i$. Далее, обозначим через $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$ подмодуль, порождённый всеми трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\dots (xu + yw) \dots] - x[\dots u \dots] - y[\dots w \dots], \tag{13-2}$$

где указанные многоточиями соответственные фрагменты всех трёх слов одинаковы. Наконец, положим по определению

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}/\mathcal{R}, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \stackrel{\text{def}}{=} [v_1 \dots v_n] \pmod{\mathcal{R}}. \tag{13-3}$$

Этот модуль называется *тензорным произведением* модулей $V_1, \dots, V_n$ над K, а его элементы называются *тензорами*. Если надо явно указать кольцо K, над которым рассматриваются модули, мы будем писать $\otimes_K$ вместо $\otimes$. Тензоры вида $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$, где $v_i \in V_i$, называются *разложимыми*. По построению, они линейно порождают модуль $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ над K. Подчеркнём, что K-линейная комбинация разложимых тензоров, скорее всего, будет неразложима. В силу того, что все трёхчленные комбинации (13-2) объявлены равными нулю, в модуле $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ выполняются соотношения (13-1), а отображение

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 \otimes \dots \otimes V_n, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n, \tag{13-4}$$

линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных. Оно называется *тензорным умножением*, и его образ состоит в точности из разложимых тензоров. Обратите внимание, что отображение (13-4) обычно не сюрьективно, его образ *не является* K-подмодулем, но его линейная оболочка равна $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Это объясняется тем, что отображение (13-4) не линейно, но при этом однозначно линеаризует все полилинейные отображения $V_1 \times \dots \times V_n \to W$.

[1] См. n° 5.1.5 на стр. 88.

13.1.1. Полилинейные отображения. Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W\,, \tag{13-5}$$

где $V_1, \ldots, V_n$ и W — произвольные K-модули, называется *полилинейным* (или *n-линейным*, когда важно точно указать количество аргументов), если оно линейно отдельно по каждому из своих аргументов при произвольным образом зафиксированных остальных:

$$\varphi(\,\ldots\,,\, \lambda v' + \mu v''\,,\, \ldots\,) = \lambda\, \varphi(\,\ldots\,,\, v'\,,\, \ldots\,) + \mu\, \varphi(\,\ldots\,,\, v''\,,\, \ldots\,)\,.$$

Например, 1-линейные отображения $V \to W$ суть просто линейные отображения, а 2-линейные отображения $V \times V \to K$ — это билинейные формы на модуле V. Полилинейные отображения (13-5) можно складывать и умножать на элементы из кольца K, так что они тоже образуют K-модуль. Он называется *модулем полилинейных отображений* и обозначается через $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_n; W)$ или $\mathrm{Hom}_K(V_1, \ldots, V_n; W)$, если важно явно указать кольцо.

Пример 13.1 (полилинейные отображения свободных модулей)
Если все модули V_i свободны с базисами $E_i \subset V_i$, то каждое полилинейное отображение (13-5) однозначно определяется своими значениями $\varphi(e_1, \ldots, e_n) \in W$ на всевозможных сочетаниях базисных векторов $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, и эти значения могут быть произвольны. Если они заданы, то на любом наборе векторов $v_i = \sum_{e_i \in E_i} x_{e_i} e_i \in V_i$ отображение φ будет принимать значение

$$\varphi(v_1, \ldots, v_n) = \sum\nolimits_{(e_1,\ldots,e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n} x_{e_1} \ldots x_{e_n} \varphi(e_1, \ldots, e_n)\,.$$

Если модуль W тоже свободен с базисом $E \subset W$ то векторы $\varphi(e_1, \ldots, e_n) \in W$ можно однозначно задавать их координатами в этом базисе. Пусть

$$\varphi(e_1, \ldots, e_n) = \sum\nolimits_{e \in E} a^{e}_{e_1,\ldots,e_n} e\,.$$

Сопоставим полилинейному отображению φ набор чисел $a^{e}_{e_1,\ldots,e_n} \in K$, который можно представлять себе как $(n+1)$-мерную матрицу, ячейки которой нумеруются элементами множества[1] $E \times E_1 \times \ldots \times E_n$. В терминах этой матрицы

$$\varphi(v_1, \ldots, v_n) = \sum\nolimits_{(e, e_1,\ldots,e_n) \in E \times E_1 \times \ldots \times E_n} x_{e_1} \ldots x_{e_n} a^{e}_{e_1,\ldots,e_n} e\,.$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа из K сопоставленные этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, мы получаем K-линейный изоморфизм между модулем $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_n; W)$ и свободным модулем $(n+1)$-мерных матриц размера $E \times E_1 \times \ldots \times E_n$, базис которого нумеруется элементами множества $E \times E_1 \times \ldots \times E_n$. При этом изоморфизме стандартная базисная матрица, имеющая единицу в позиции $(e, e_1, \ldots, e_n)$ и нули в остальных местах, переходит в полилинейное отображение $\delta^{e_1 \ldots e_n}_{e} : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto x_{e_1} \ldots x_{e_n} \cdot e$, значения которого на базисных векторах суть

$$\delta^{e_1 \ldots e_n}_{e}(e'_1, \ldots, e'_n) = \begin{cases} e, & \text{если } (e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{13-6}$$

Если ранги всех модулей конечны, то $\mathrm{rk}\,\mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_n; W) = \mathrm{rk}\, W \cdot \prod_i \mathrm{rk}\, V_i$.

[1] При $n = 1$ получается обычная двумерная матрица линейного отображения $V \to W$, строки которой биективно соответствуют базисным векторам пространства W, а столбцы — базисным векторам пространства V.

Предложение 13.1 (универсальное свойство тензорного произведения)
Для любого полилинейного отображения K-модулей $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ существует единственное такое линейное отображение $\overline{\varphi} : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$, что $\varphi = \overline{\varphi} \circ \tau$, т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \arrow[d, dashed, "\overline{\varphi}"] \\ V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r, "\varphi"'] & W \end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

Доказательство. Для любого отображения множеств $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ существует единственное линейное отображение $F : \mathcal{V} \to W$, переводящее базисный вектор $[v_1 \ldots v_n] \in \mathcal{V}$ в $\varphi(v_1, \ldots , v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на фактор модуле $\mathcal{V}/\mathcal{R}$, достаточно проверить, что $\mathcal{R} \subset \ker F$. Для каждого соотношения (13-2) в силу полилинейности φ и линейности F имеем

$$\begin{aligned} &F\big([\ldots (\lambda u + \mu w) \ldots] - \lambda\,[\ldots u \ldots] - \mu\,[\ldots w \ldots]\big) = \\ &\qquad = F\big([\ldots (\lambda u + \mu w) \ldots]\big) - \lambda\, F\big([\ldots u \ldots]\big) - \mu\, F\big([\ldots w \ldots]\big) = \\ &\qquad\qquad = \varphi(\ldots\,, (\lambda u + \mu w),\, \ldots) - \lambda\,\varphi(\ldots\,, u,\, \ldots) - \mu\,\varphi(\ldots\,, w,\, \ldots) = 0\,, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Предложение 13.2 (единственность универсального полилинейного отображения)
Если полилинейные отображения $\tau_1 : V_1 \times \ldots \times V_n \to U_1$ и $\tau_2 : V_1 \times \ldots \times V_n \to U_2$ обладают универсальным свойством из предл. 13.1, т. е. для любых векторного пространства W и полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ существуют единственные такие линейные отображения $\overline{\varphi}_1 : U_1 \to W$ и $\overline{\varphi}_2 : U_2 \to W$, что $\varphi = \overline{\varphi}_1 \circ \tau_1 = \overline{\varphi}_2 \circ \tau_2$, то имеется единственный такой линейный изоморфизм $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, что $\tau_2 = \iota \tau_1$.

Доказательство. В силу универсальности τ_1 и τ_2 существуют единственные такие линейные отображения $\overline{\tau}_{21} : U_1 \to U_2$ и $\overline{\tau}_{12} : U_2 \to U_1$, что $\tau_2 = \overline{\tau}_{21}\tau_1$ и $\tau_1 = \overline{\tau}_{12}\tau_2$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[dr, dashed, "\overline{\tau}_{21}"] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] & & & & U_2 \arrow[dl, dashed, "\overline{\tau}_{12}"'] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \\ & U_2 \arrow[dl, dashed, "\overline{\tau}_{12}"] & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dashed, "\overline{\tau}_{21}"'] & \\ U_1 & & & & U_2\,. \end{tikzcd}$$

Равенства $\overline{\tau}_{21}\overline{\tau}_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$ и $\overline{\tau}_{12}\overline{\tau}_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$ выполняются в силу того, что разложения $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ единственны и имеют место для $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

Предложение 13.3
Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $E_i \subset V_i$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ также свободно с базисом

$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_n , \quad e_i \in E_i . \tag{13-7}$$

В частности, если $\operatorname{rk} V_i = |E_i| < \infty$ для всех i, то $\operatorname{rk} V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \prod \operatorname{rk} V_i$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}$ свободный модуль с базисом из выражений (13-7), которые мы временно будем воспринимать как формальные символы. Полилинейное отображение $\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathcal{W}$, переводящее каждый набор базисных векторов $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ в соответствующий базисный вектор (13-7) модуля $\mathcal{W}$, универсально, поскольку для полилинейного $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ и линейного $F : \mathcal{W} \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ равносильно выполнению для всех $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ равенств $F(e_1 \otimes \ldots \otimes e_n) = \varphi(e_1, \ldots, e_n)$, которые однозначно определяют F, если дано φ, и наоборот. По предл. 13.2 имеется единственный линейный изоморфизм $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, переводящий базисные векторы (13-7) модуля $\mathcal{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, вычисленные в $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. □

Пример 13.2 (многочлены)
Обратите внимание, что предл. 13.3 справедливо и для свободных модулей *бесконечного* ранга. Например, тензорное произведение n экземпляров модуля многочленов $K[x] \otimes \ldots \otimes K[x]$ изоморфно модулю многочленов от n переменных $K[x_1, \ldots, x_n]$. Изоморфизм сопоставляет базисному разложимому тензору $x^{m_1} \otimes \ldots \otimes x^{m_n}$ базисный моном $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$.

Предостережение 13.1. Для произвольных модулей над произвольным коммутативным кольцом строение модуля $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ отнюдь не очевидно из его определения в терминах образующих и соотношений. Например, при взаимно простых $m, n \in \mathbb{Z}$ тензорное произведение $\mathbb{Z}$-модулей $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$, поскольку класс $[n]_m \in \mathbb{Z}/(m)$ обратим, и каждый элемент $[a]_m \in \mathbb{Z}/(m)$ представляется в виде $[a]_m = [na']_m$, откуда каждый разложимый тензор

$$[a]_m \otimes [b]_n = [na']_m \otimes [b]_n = n \cdot ([a']_m \otimes [b]_n) = [a']_m \otimes [nb]_n = [a']_m \otimes [0]_n = 0$$

ибо тензорное произведение с нулевым вектором всегда нулевое:

$$a \otimes 0 = a \otimes (0 \cdot 0) = 0 \cdot (a \otimes 0) = 0 .$$

Упражнение 13.1. Докажите, что в общем случае $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n) \simeq \mathbb{Z}/(\text{нод}(m, n))$.

Предложение 13.4
Для любого K-модуля V отображение $K \otimes V \xrightarrow{\sim} V$, $x \otimes u \mapsto xu$, является K-линейным изоморфизмом.

Доказательство. Достаточно убедиться, что билинейное отображение

$$\tau : K \times V \xrightarrow{\sim} V , \quad (x, u) \mapsto xu ,$$

универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi : K \times V \xrightarrow{\sim} W$ отображение $\widetilde{\varphi} : V \to W$ со свойством $\widetilde{\varphi}\tau = \varphi$ обязано переводить каждый вектор $v \in V$ в $\varphi(1, v)$. Очевидно, что это отображение линейно и $\widetilde{\varphi}(xv) = \varphi(1, xv) = x\varphi(1, v) = \varphi(x, v)$ для любых $x \in K$ и $v \in V$. □

Упражнение 13.2. Докажите, что $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$.

13.1.2. Тензорные произведения векторных пространств. Если $V_1, \dots, V_n$ являются векторными пространствами над полем $\Bbbk$ размерностей $d_1, \dots, d_n$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ имеет размерность $d_1 \dots d_n$. На геометрическом языке тензорное умножение

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

отображает произведение проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$, где $m_i = d_i - 1$, в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes \dots \otimes V_n\right)$ размерности $m = d_1 \dots d_n - 1 = (m_1 + 1) \dots (m_n + 1) - 1$:

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m \,. \tag{13-8}$$

Оно переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое тензором $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$.

Упражнение 13.3. Убедитесь, что отображение (13-8) корректно определено[1], инъективно, и его образ не содержится ни в какой гиперплоскости.

Отображение (13-8) называется *вложением Сегре*. Его образ состоит из классов пропорциональности разложимых тензоров и называется *многообразием Сегре*. Он линейно порождает объемлющее проективное пространство, имея при этом размерность $m_1 + \dots + m_n$, обычно намного меньшую, чем m. По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, \dots, m_n$ так, что подпространства в каждом из семейств попарно не пересекаются, а любые n подпространств из разных семейств пересекаются в одной точке, и каждая точка многообразия Сегре является точкой пересечения n таких подпространств.

Пример 13.3 (изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ и разложимые операторы)
Для произвольных векторных пространств U, W над полем $\Bbbk$ имеется билинейное отображение

$$W \times U^* \to \mathrm{Hom}(U, W) \tag{13-9}$$

переводящее пару $(w, \xi) \in W \times U^*$ в линейный оператор

$$U \to W \,, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w \,, \tag{13-10}$$

с ядром $\mathrm{Ann}(\xi) \subset U$ и образом $\Bbbk\, w$. При ненулевых ξ, w оператор (13-10) имеет ранг 1. Поскольку образ любого оператора $F : U \to W$ ранга 1 порождается некоторым ненулевым вектором $w \in W$, который определяется по F однозначно с точностью до пропорциональности, значение такого оператора на произвольном векторе $u \in U$ равно $F(u) = \xi(u) \cdot w$ для некоторого $\xi \in \mathrm{Ann} \ker F \subset U^*$, однозначно определяемого по F и w. Мы заключаем, что *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}(U, W)\big)$$

биективно отображает произведение $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(U^*)$ на множество рассматриваемых с точностью до пропорциональности линейных операторов $U \to W$ ранга 1.

В силу универсального свойства тензорного произведения, билинейное отображение (13-9) однозначно задаёт линейное отображение

$$W \otimes U^* \to \mathrm{Hom}(U, V) \tag{13-11}$$

[1] Т. е. тензор $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ отличен от нуля при любых ненулевых $v_i \in V_i$ и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные.

переводящее каждый разложимый тензор $w \otimes \xi$ в оператор (13-10). Если пространства U и W конечномерны с базисами $u_1, \dots, u_n$ и $w_1, \dots, w_m$, то mn разложимых тензоров $w_j \otimes u_i^*$, где $u_1^*, \dots, u_n^* \in U^*$ образуют двойственный к $u_1, \dots, u_n$ базис пространства U^*, образуют базис пространства $W \otimes U^*$. Отображение (13-11) переводит базисный тензор $w_j \otimes u_i^*$ в линейный оператор

$$U \to W\,, \quad u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях}\,, \end{cases}$$

матрицей которого в выбранных базисах является стандартная базисная матрица E_{ij} с единицей в клетке (i, j) и нулями в остальных местах. Мы заключаем, что отображение (13-11) является линейным изоморфизмом. В дальнейшем мы часто будем отождествлять пространства $W \otimes U^*$ и $\mathrm{Hom}(U, W)$ при помощи изоморфизма (13-11) и обозначать оператор (13-10) через $w \otimes \xi$. Если записывать операторы $U \to W$ их матрицами $A = (a_{ij})$ в выбранных выше базисах, то точки $w = (x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n) \in \mathbb{P}_m = \mathbb{P}(W)$ и $\xi = (y_0 : y_1 : \ \dots \ : y_m) \in \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(U^*)$ перейдут при вложении Сегре в $m \times n$ матрицу $A = w^t \cdot \xi$ с элементами $a_{ij} = x_i y_j$, а его образ, состоящий из матриц ранга 1, задастся однородными квадратичными уравнениями

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij} a_{\ell k} - a_{ik} a_{\ell j} = 0\,.$$

Два семейства координатных пространств $\xi \times \mathbb{P}_m$ и $\mathbb{P}_n \times w$ при этом перейдут в два семейства лежащих на многообразии Сегре проективных пространств, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями между строками и столбцами соответственно.

Пример 13.4 (квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$)
При $U = W = \Bbbk^2$ вложение Сегре задаёт биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и обсуждавшейся в курсе геометрии[1] квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)\right)$, точками которой являются ненулевые матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ с $ad - bc = 0$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности. Эта биекция переводит пару точек $(x_0 : x_1)$ и $(y_0 : y_1)$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 & x_1 y_0 \\ x_0 y_1 & x_1 y_1 \end{pmatrix} \tag{13-12}$$

и отображает два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times \{y\}$, $\{x\} \times \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в два семейства проективных прямых на квадрике Сегре, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями [строка 1] : [строка 2] $= (x_0 : x_1)$ и [столбец 1] : [столбец 2] $= (y_0 : y_1)$. В каждом из семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, при этом каждая точка квадрики Сегре является точкой пересечения ровно одной пары прямых из разных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упражнение 13.4. Докажите все эти геометрические утверждения.

13.2. Канонические изоморфизмы. Всюду в этом разделе речь идёт о произвольных модулях над любым коммутативным кольцом K. Линейные отображения $f : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$ удобно задавать указанием значений $f(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$ на разложимых тензорах, а затем по линейности продолжать f на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают

[1]См. раздел 19.4.1 на стр. 246 в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_19.pdf.

модуль $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, такое продолжение единственно при условии, что оно существует. Последнее равносильно тому, что все линейные соотношения, которые имеются между разложимыми тензорами, выполняются и между их образами в модуле W. Поскольку все эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности из форм. (13-1) на стр. 210, мы получаем следующий полезный критерий.

Лемма 13.1
Линейное отображение $f : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$, $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto f(v_1, \ldots, v_n)$, существует если и только если векторы $f(v_1, \ldots, v_n) \in W$ полилинейно зависят[1] от векторов $v_i \in V_i$. □

Предложение 13.5
Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, $u \otimes w \mapsto w \otimes u$.

Доказательство. Так как правило $u \otimes w \mapsto w \otimes u$ билинейно по u, w, оно по лем. 13.1 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \to W \otimes U$. Аналогично, существует линейное отображение $W \otimes U \to U \otimes W$, $w \otimes u \mapsto u \otimes w$. Оно обратно предыдущему, поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах. □

Предложение 13.6 (ассоциативность тензорного умножения)
Имеются канонические изоморфизмы $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$, переводящие тензоры $v \otimes (u \otimes w)$, $v \otimes u \otimes w$ и $(v \otimes u) \otimes w$ друг в друга.

Доказательство. Поскольку тензор $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$ трилинейно зависит от (v, u, w), существует линейное отображение $V \otimes U \otimes W \to V \otimes (U \otimes W)$, $v \otimes u \otimes w \mapsto v \otimes (u \otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v \in V$ тензор $v \otimes u \otimes w$ билинейно зависит от u и w. Поэтому имеется линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \to V \otimes U \otimes W\,, \quad u \otimes w \mapsto v \otimes u \otimes w\,,$$

которое само по себе линейно зависит от v. Так как тензор $\tau_v(t) = v \otimes t$ билинеен по $v \in V$ и $t \in U \otimes W$, мы получаем искомое линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \to V \otimes U \otimes W\,, \quad v \otimes (u \otimes w) \mapsto v \otimes u \otimes w\,.$$

Изоморфизм $V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$ устанавливается аналогично. □

Предложение 13.7 (дистрибутивность тензорного умножения)
Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V)\,,$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dotplus w) \leftrightarrows (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dotplus w) \otimes v \leftrightarrows (u \otimes v) \dotplus (w \otimes v)$$

где через $a \dotplus b$ для $a \in A$ и $b \in B$ обозначено сложение элементов $(a, 0)$ и $(0, b)$ в прямой сумме модулей $A \oplus B$.

[1] Т. е. линейны по каждому v_i при фиксированных остальных.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм, второй получится из него применением предл. 13.5. Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \to (V \otimes U) \oplus (V \otimes W), \quad v \otimes (u \dotplus w) \mapsto (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w), \tag{13-13}$$

существует, поскольку $(v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)$ билинеен по v и $u \dotplus w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала строим линейные отображения

$$f_1 : V \otimes U \to V \otimes (U \oplus W), \quad v \otimes u \mapsto v \otimes (u \dotplus 0),$$
$$f_2 : V \otimes W \to V \otimes (U \oplus W), \quad v \otimes w \mapsto v \otimes (0 \dotplus w),$$

затем складываем их в отображение

$$f : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \to V \otimes (U \oplus W), \quad a \dotplus b \mapsto f_1(a) + f_2(b),$$

очевидно, линейное и обратное к (13-13). □

13.3. Тензорное произведение линейных отображений. Для любого набора K-линейных отображений $f_i : U_i \to W_i$ между произвольными модулями над коммутативным кольцом K, тензор

$$f_1(u_1) \otimes \ldots \otimes f_n(u_n) \in W_1 \otimes \ldots \otimes W_n$$

полилинейно зависит от векторов $(u_1, \ldots, u_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n$. Поэтому существует единственное линейное отображение

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_n : U_1 \otimes \ldots \otimes U_n \to W_1 \otimes \ldots \otimes W_n,$$
$$u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \mapsto f_1(u_1) \otimes \ldots \otimes f_n(u_n).$$

Оно называется *тензорным произведением* отображений $f_i : U_i \to W_i$.

Пример 13.5 (кронекерово произведение матриц)

Рассмотрим векторные пространства U и W с базисами $u_1, \ldots, u_n \in U$ и $w_1, \ldots, w_m \in W$. Если линейные операторы $f : U \to U$ и $g : W \to W$ имеют в этих базисах матрицы $F = (\varphi_{ij})$ и $G = (\gamma_{k\ell})$, то матрица оператора $f \otimes g : U \otimes W \to U \otimes W$ в базисе из тензоров $u_j \otimes w_\ell$ имеет размеры $(mn) \times (mn)$, а её элементы естественно нумеруются упорядоченными парами (α, β), $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, $1 \leqslant \beta \leqslant m$. Эта матрица называется *кронекеровым произведением* матриц F, G и обозначается $F \otimes G$. Поскольку

$$f \otimes g\,(u_j \otimes w_\ell) = \Big(\sum_i u_i \varphi_{ij}\Big) \otimes \Big(\sum_k w_k \gamma_{k\ell}\Big) = \sum_{i,k} \varphi_{ij}\gamma_{k\ell} \cdot u_i \otimes w_k,$$

в пересечении (i,k)-ой строки и (j,ℓ)-го столбца матрицы $F \otimes G$ стоит произведение $\varphi_{ij}\gamma_{k\ell}$. В лексикографически упорядоченном базисе

$$u_1 \otimes w_1, \ \ldots \ , u_1 \otimes w_m, u_2 \otimes w_1, \ \ldots \ , u_2 \otimes w_m, \ \ldots \ , u_n \otimes w_1, \ \ldots \ , u_n \otimes w_m$$

матрица $F \otimes G$ имеет блочный вид и состоит из n^2 блоков размера $m \times m$, каждый из которых пропорционален матрице G:

$$F \otimes G = (\varphi_{ij}) \otimes (\gamma_{k\ell}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}G & \varphi_{12}G & \ldots & \varphi_{1n}G \\ \varphi_{21}G & \varphi_{22}G & \ldots & \varphi_{2n}G \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}G & \varphi_{n2}G & \ldots & \varphi_{nn}G \end{pmatrix}.$$

Лемма 13.2
Если гомоморфизмы K-модулей $f_1 : U_1 \twoheadrightarrow W_1$ и $f_2 : U_2 \twoheadrightarrow W_2$ сюрьективны, то гомоморфизм $f_1 \otimes f_2 : U_1 \otimes U_2 \to W_1 \otimes W_2$ тоже сюрьективен.

Доказательство. Образ $\mathrm{im}(f_1 \otimes f_2)$ содержит все разложимые тензоры $w_1 \otimes w_2 \in W_1 \otimes W_2$. □

Лемма 13.3
Если ненулевой K-модуль F свободен, то для любого инъективного гомоморфизма K-модулей $f : U \hookrightarrow W$ гомоморфизм $\mathrm{Id}_F \otimes f : F \otimes U \to F \otimes W$ тоже инъективен.

Доказательство. Если $F \simeq K$ имеет ранг 1, изоморфизм из предл. 13.4

$$K \otimes U \xrightarrow{\sim} U\,,\ x \otimes u \mapsto xu\,, \quad \text{и} \quad K \otimes W \xrightarrow{\sim} W\,,\ y \otimes w \mapsto yw\,,$$

отождествляет отображение $\mathrm{Id}_F \otimes f : K \otimes U \to K \otimes W$ с исходным $f : U \to W$, инъективным по условию. Произвольный свободный модуль с базисом E является прямой суммой $F \simeq \bigoplus_{e \in E} Ke$ свободных модулей ранга 1, занумерованных базисными векторами $e \in E$. По предл. 13.7 и предл. 13.4 модули

$$\begin{aligned} F \otimes U &\simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} (Ke \otimes U) \simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} U_e \\ F \otimes W &\simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} (Ke \otimes W) \simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} W_e \end{aligned} \tag{13-14}$$

являются прямыми суммами занумерованных базисными векторами $e \in E$ одинаковых копий $U_e \stackrel{\text{def}}{=} Ke \otimes U \simeq U$ и $W_e \stackrel{\text{def}}{=} Ke \otimes W \simeq W$ модулей U, W, причём изоморфизмы (13-14) отождествляют линейное отображение $\mathrm{Id}_F \otimes f$ с диагональным отображением $\bigoplus_{e \in E} U_e \to \bigoplus_{e \in E} U_e$, переводящим последовательность векторов $\left(u_e\right)_{e \in E}$ в последовательность векторов $\left(f(u_e)\right)_{e \in E}$. При инъективном f такое отображение тоже инъективно. □

Предостережение 13.2. Если модуль V не свободен, тензорное произведение

$$\mathrm{Id}_V \otimes f : V \otimes U \to V \otimes W$$

может оказаться не инъективным даже для вложения $f : U \hookrightarrow W$ свободных модулей. Например, вложение $\mathbb{Z}$-модулей $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $z \mapsto 2z$, при тензорном умножении на тождественный эндоморфизм модуля $\mathbb{Z}/(2)$ превращается в нулевой гомоморфизм $\mathbb{Z}/(2) \to \mathbb{Z}/(2)$, $[1]_2 \mapsto [0]_2$.

13.4. Тензорное произведение модулей, заданных образующими и соотношениями. Напомню[1], что если K-модуль V линейно порождается над K векторами $v_1, \dots, v_n$, то он изоморфен фактору K^n / R_v свободного модуля K^n по подмодулю $R_v \subset K^n$ линейных соотношений между образующими v_i, который состоит из всех таких строк $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, что $\sum x_i e_i = 0$ в V. Следующая далее теор. 13.1 описывает тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$ двух представленных таким способом K-модулей $V_1 \simeq F_1 / R_1$ и $V_2 \simeq F_2 / R_2$ как фактор свободного модуля $F_1 \otimes F_2$ по подмодулю соотношений, устроенному следующим образом. По лем. 13.3 вложения $\iota_1 : R_1 \hookrightarrow F_1$ и $\iota_2 : R_2 \hookrightarrow F_2$ задают вложения $\iota_1 \otimes \mathrm{Id}_{F_2} : R_1 \otimes F_2 \hookrightarrow F_1 \otimes F_2$ и $\mathrm{Id}_{F_1} \otimes \iota_2 : F_1 \otimes R_2 \hookrightarrow F_1 \otimes F_2$, позволяющие рассматривать тензорные произведения $R_1 \otimes F_2$ и $F_1 \otimes R_2$ как подмодули свободного модуля $F \otimes G$. Искомый модуль соотношений является линейной оболочкой этих двух подмодулей и обозначается $R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$.

[1]См. n° 5.1.5 на стр. 88.

Теорема 13.1
$\left(F_1/R_1\right) \otimes \left(F_1/R_1\right) \simeq \left(F_1 \otimes F_2\right)/\left(R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2\right)$ для любых свободных модулей F_1, F_2 над произвольным коммутативным кольцом K и любых их подмодулей $R_1 \subset F_1$, $R_2 \subset F_2$.

Доказательство. Положим $V_1 = F_1/R_1$, $V_2 = F_2/R_2$, $S = R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$. Для любых $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$ класс $[f_1 \otimes f_2]_S = f_1 \otimes f_2 \pmod S \in \left(F_1 \otimes F_2\right)/S$ зависит только от классов $[f_1]_{R_1} = f_1 \pmod{R_1} \in V_1$ и $[f_2]_{R_2} = f_2 \pmod{R_2} \in V_2$, так как для всех $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$

$$(f_1 + r_1) \otimes (f_2 + r_2) = f_1 \otimes f_2 + \left(r_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes r_2 + r_1 \otimes r_2\right) \equiv f_1 \otimes f_2 \pmod S\ .$$

Поэтому корректно определено билинейное отображение

$$\overline{\tau} :\ V_1 \times V_2 \to \left(F_1 \otimes F_2\right)/S\,, \quad ([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}) \mapsto [f_1 \otimes f_2]_S\,, \tag{13-15}$$

включающееся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F_1 \times F_2 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_1\times\pi_2"'] & F_1 \otimes F_2 \arrow[d, "\pi"] \\
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\overline{\tau}"] & \left(F_1 \otimes F_2\right)/S
\end{tikzcd}$$

где через $\tau :\ F_1 \times F_2 \to F_1 \otimes F_2$ обозначено универсальное билинейное отображение, а

$$\pi_1 :\ F_1 \twoheadrightarrow V_1\,, \quad \pi_2 :\ F_2 \twoheadrightarrow V_2\,, \quad \pi :\ F_1 \otimes F_2 \twoheadrightarrow (F_1 \otimes F_2)/S$$

суть линейные проекции на факторы. Покажем, что отображение (13-15) универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi :\ V_1 \times V_2 \to W$ композиция

$$\varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2) :\ F_1 \times F_2 \to W\,, \quad (f_1, f_2) \mapsto \varphi\left([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}\right)\,,$$

тоже билинейна. Поэтому существует единственное такое линейное отображение

$$\psi :\ F_1 \otimes F_2 \to W\,,$$

что $\psi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$, т. е. мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F_1 \times F_2 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_1\times\pi_2"'] & F_1 \otimes F_2 \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, "\psi"] & \\
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\overline{\tau}"] \arrow[drr, "\varphi"'] & \left(F_1 \otimes F_2\right)/S \arrow[dr, "\overline{\psi}"] & \\
 & & W\,.
\end{tikzcd} \tag{13-16}$$

Поскольку для всех $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$ выполняется равенство $\psi(f_1 \otimes f_2) = \varphi\left([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}\right)$, отображение ψ аннулирует оба линейно порождающих S подмодуля $R_1 \otimes F_2, F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$ и факторизуется до линейного отображения $\overline{\psi} :\ \left(F_1 \otimes F_2\right)/S \to W$, удовлетворяющего соотношению $\overline{\psi} \circ \pi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$. Поэтому $\overline{\psi} \circ \overline{\tau} \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \overline{\psi} \circ \pi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$. Так как проекция $\pi_1 \times \pi_2$ сюрьективна, $\varphi = \overline{\psi} \circ \overline{\tau}$. Остаётся проверить, что любое линейное отображение $\eta : \ \big(F_1 \otimes F_2\big)/S \to W$, удовлетворяющее соотношению $\varphi = \eta \circ \overline{\tau}$, совпадает с $\overline{\psi}$. Поскольку

$$\eta \circ \pi \circ \tau = \eta \circ \overline{\tau} \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \overline{\psi} \circ \pi \circ \tau \,,$$

универсальное свойство отображения τ влечёт равенство $\eta \circ \pi = \overline{\psi} \circ \pi$. Равенство $\eta = \overline{\psi}$ вытекает из него силу сюрьективности проекции π. □

Пример 13.6 (тензорные произведения абелевых групп)
Из теор. 13.1 вытекает, что для любых $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\mathbb{Z}}{(m)} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{(n)} \simeq \frac{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}}{(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (n)} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(m, n)} = \frac{\mathbb{Z}}{(\text{нод}(m, n))} \,,$$

где предпоследнее равенство задаётся изоморфизмом из предл. 13.4 на стр. 213. При помощи изоморфизмов дистрибутивности из предл. 13.7 на стр. 216 это позволяет вычислить все тензорные произведения конечно порождённых абелевых групп.

13.5. Тензорное произведение алгебр. Если K-модули A и B являются ассоциативными K-алгебрами[1], то на их тензорном произведении $A \otimes_K B$ имеется естественная структура алгебры, задаваемая покомпонентным перемножением разложимых тензоров

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2) \tag{13-17}$$

продолженным на линейные комбинации разложимых тензоров по дистрибутивности. В самом деле, при фиксированных $a \in A$ и $b \in B$ тензор $(ax) \otimes (by)$ билинеен по $x \in A$ и $y \in B$, и стало быть, корректно определено линейное отображение

$$\lambda_{a \otimes b} : \ A \otimes B \to A \otimes B \,, \quad x \otimes y \mapsto (ax) \otimes (by) \,,$$

билинейно зависящее от $a \in A$ и $b \in b$. Поэтому правило $a \otimes b \mapsto \lambda_{a \otimes b}$ корректно продолжается до линейного отображения

$$\lambda : \ A \otimes B \to \operatorname{End}_K(A \otimes B) \,, \quad t \mapsto \lambda_t \,,$$

сопоставляющего каждому тензору $t : \ A \otimes B$ линейный оператор $\lambda_t : \ A \otimes B \to A \otimes B$ левого умножения на этот тензор так, что разложимые тензоры перемножаются по формуле (13-17). Если алгебры A и B ассоциативны, то и алгебра $A \otimes B$ ассоциативна, поскольку на разложимых тензорах проверка ассоциативности сводится к покомпонентной её проверке отдельно в каждом тензорном множителе. Если в алгебрах A и B есть единицы $1_A \in A$ и $1_B \in B$, то их тензорное произведение $1_A \otimes 1_B$ является единицей алгебры $A \otimes B$, поскольку умножение на $1_A \otimes 1_B$ тождественно действует на разложимые тензоры. Если алгебры A и B коммутативны, то алгебра $A \otimes B$ тоже коммутативна.

Пример 13.7 (многочлены, продолжение прим. 13.2 на стр. 213)
Построенный в прим. 13.2 на стр. 213 изоморфизм K-модулей

$$K[x]^{\otimes n} = K[x] \otimes \ldots \otimes K[x] \xrightarrow{\sim} K[x_1, \ldots, x_n] \,, \quad x^{m_1} \otimes \ldots \otimes x^{m_n} \mapsto x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \,,$$

является изоморфизмом K-алгебр, где структура алгебры на $K[x]^{\otimes n}$ задаётся покомпонентным умножением разложимых тензоров, а алгебра многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$ рассматривается со своей стандартной структурой.

[1] См. n° 5.2 на стр. 90.

Пример 13.8 (тензорное произведение полей)
Пусть поле $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$ получается из поля $\Bbbk$ присоединением корня[1] неприводимого в $\Bbbk[x]$ сепарабельного[2] многочлена $f \in \Bbbk[x]$, который над некоторым другим полем $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ раскладывается в произведение $f = g_1 \dots g_m$ неприводимых в $\mathbb{F}[x]$ многочленов $g_i \in \mathbb{F}[x]$. Обозначим через $\mathbb{L}_i = \mathbb{F}[x]/(g_i)$ поля, получающиеся из $\mathbb{F}$ присоединением корней этих многочленов. В теории чисел и теории Галуа важную роль играет изоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_1 \times \dots \times \mathbb{L}_m\,, \quad [h]_f \otimes z \mapsto ([zh]_{g_1}, \dots, [zh]_{g_m})\,, \tag{13-18}$$

который является композицией изоморфизма

$$\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}[x]/(f)\,, \quad [h]_f \otimes z \mapsto [zh]_f\,, \tag{13-19}$$

и изоморфизма $\mathbb{F}[x]/(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_1 \times \dots \times \mathbb{L}_m\,, \quad [h]_f \mapsto ([h]_{g_1}, \dots, [h]_{g_m})$, из китайской теоремы об остатках[3], которая имеет место, поскольку в силу сепарабельности многочлена f неприводимые многочлены g_i попрано различны и тем самым попрано взаимно просты в $\mathbb{F}[x]$.

Упражнение 13.5. Убедитесь, что отображение (13-19) корректно определено и является гомоморфизмом $\Bbbk$-алгебр.

Для доказательства того, что гомоморфизм (13-19) является изоморфизмом, достаточно убедиться, что $\Bbbk$-билинейное отображение векторных пространств над $\Bbbk$

$$\tau\colon\ \mathbb{K} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}[x]/(f)\,, \quad ([h]_f, z) \mapsto [zh]_f\,,$$

универсально. Но для любого $\Bbbk$-билинейного отображения $\varphi\colon\ \mathbb{K} \times \mathbb{F} \to W$ линейное над $\Bbbk$ отображение $\widetilde{\varphi}\colon\ \mathbb{F}[x]/(f) \to W$ со свойством $\widetilde{\varphi} \circ \tau = \varphi$ обязано действовать по правилу

$$[z_0 + z_1 x + \dots + z_m x^m]_f \mapsto \varphi([1]_f, z_0) + \varphi([x]_f, z_1) + \dots + \varphi([x^m]_f, z_m)\,,$$

где $z_0, z_1, \dots, z_m \in \mathbb{F}$.

Упражнение 13.6. Убедитесь, что это правило и впрямь корректно задаёт $\Bbbk$-линейное отображение $\mathbb{F}[x]/(f) \to W$.

[1] См. n° 2.3.1 на стр. 44.
[2] См. n° 2.3.4 на стр. 47.
[3] См. теор. 2.2 на стр. 46.

Упр. 13.1. Пусть нод$(m,n) = d$. Значение $\varphi([a]_m,[b]_n)$ любого $\mathbb{Z}$-билинейного отображения

$$\varphi : \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(m) \to W \tag{14-47}$$

зависит только от классов $[a]_d, [b]_d \in \mathbb{Z}/(d)$, т. е. имеет вид $\varphi([a]_m,[b]_n) = \varphi([a]_d,[b]_d)$, так как все кратные d числа выражаются в виде $xm + yn$ с $x, y \in \mathbb{Z}$, и

$$\begin{aligned}
&\varphi([a+k_1d]_m,[b+k_2d]_n) = \\
&\quad = \varphi([a+x_1m+y_1n]_m,[b+x_2m+y_2n]_n) = \varphi([a]_m + n[y_1]_m,[b]_n + m[x_1]_n) = \\
&\quad = \varphi([a]_m,[b]_n) + n\varphi([y_1]_m,[b]_n) + m\varphi([a]_m,[x_1]_n) + mn\varphi([y_1]_m,[x_1]_n) = \\
&\quad = \varphi([a]_m,[b]_n) + \varphi([y_1]_m,[nb]_n) + \varphi([ma]_m,[x_1]_n) + \varphi([my_1]_m,[nx_1]_n) = \\
&\quad = \varphi([a]_m,[b]_n) + \varphi([y_1]_m,[0]_n) + \varphi([0]_m,[x_1]_n) + \varphi([0]_m,[0]_n) = \varphi([a]_m,[b]_n)\,.
\end{aligned}$$

Из этого вытекает, что $\mathbb{Z}$-билинейное отображение

$$\tau : \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(m) \to \mathbb{Z}/(d)\,, \quad ([a]_m,[b]_n) \mapsto [ab]_d$$

универсально. Действительно, для любого $\mathbb{Z}$-билинейного отображения (14-47) линейное отображение $\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z}/(d) \to W$ со свойством $\varphi = \widetilde{\varphi}\circ\tau$ должно действовать по правилу $[c]_d \mapsto \varphi(1,[c]_d)$, и это правило действительно задаёт такое линейное отображение $\widetilde{\varphi}$, что

$$\widetilde{\varphi}([ab]_d) = \varphi(1,[ab]_d) = a\varphi(1,[b]_d) = \varphi([a]_d,[b]_d) = \varphi([a]_m,[b]_n)\,.$$

Более короткое, но техничное рассуждение см. в прим. 13.6 на стр. 220.

Упр. 13.2. Покажите, что билинейное отображение $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $(x,y) \mapsto xy$, универсально, вдохновляясь тем, что $\varphi(a/b, c/d) = \varphi(ab/b, c/bd) = \varphi(1, ac/bd)$ для любого $\mathbb{Z}$-билинейного отображения $\varphi : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to W$.

Упр. 13.4. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$. Так как всякая проходящая через заданную точку p прямая, целиком лежащая на квадрике Сегре S, лежит в пересечении $S \cap T_pS$ этой квадрики с её касательной плоскостью в точке p, и плоская коника $S\cap T_pS$ уже полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке p прямых из разных семейств, никаких других прямых на квадрике Сегре нет.