

Многочлены и комплексные числа

АЛ2♦1 (минимальный многочлен). Пусть поле $\mathbb{k}$ является подполем поля $\mathbb{K}$. Число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется *алгебраическим* над $\mathbb{k}$, если $f(\alpha) = 0$ для некоторого многочлена $f \in \mathbb{k}[x]$. Приведённый многочлен наименьшей степени с таким свойством называется *минимальным многочленом* алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{K}$ над полем $\mathbb{k}$. Докажите, что в $\mathbb{k}[x]$ минимальный многочлен неприводим и делит все многочлены с корнем α .

АЛ2♦2. Найдите минимальный многочлен числа а) $2 - 3i \in \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ б) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$.

АЛ2♦3. Пусть $\mathbb{k}$ — поле характеристики $p > 0$ и $a \in \mathbb{k}$. Верно ли, что многочлен $x^p - a$ либо неприводим в $\mathbb{k}[x]$, либо имеет p -кратный корень в $\mathbb{k}$?

АЛ2♦4*. Над любым ли конечным полем $\mathbb{k}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется неприводимый в $\mathbb{k}[x]$ многочлен степени n ?

АЛ2♦5. Выражаются ли в радикалах вещественные и мнимые части корней квадратного трёхчлена из $\mathbb{C}[x]$ через вещественные и мнимые части его коэффициентов?

АЛ2♦6*. Покажите, что трёхчлен $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ тогда и только тогда имеет три вещественных корня, когда его дискриминант¹ положителен, и в этом случае подходящая замена $x = ct$, где $c \in \mathbb{R}$, приводит уравнение $f(x) = 0$ к виду $4t^3 - 3t = a$, где $|a| \leq 1$, а его корни выражаются через $\arccos a$.

АЛ2♦7. Для всех $n, s \in \mathbb{N}$ вычислите в поле $\mathbb{C}$ а) сумму б) произведение s -тых степеней всех корней n -той степени из 1.

АЛ2♦8. Покажите, что $\sin mx / \sin x$ при нечётном $m \in \mathbb{N}$ является многочленом от $\sin^2 x$ и найдите степень, корни и старший коэффициент этого многочлена.

АЛ2♦9* (эйлеровы разложения). При помощи предыдущей задачи докажите тождества

$$\text{а) } \frac{\sin(mx)}{\sin x} = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\sin^2 x - \sin^2 \left(\frac{2\pi j}{m} \right) \right) \quad \text{б) } (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin(mx) = 2^{m-1} \prod_{j=0}^{m-1} \sin \left(x + \frac{2\pi j}{m} \right)$$

АЛ2♦10 (квадратичная взаимность по Эйзенштейну). Зафиксируем простое $p \in \mathbb{N}$. Число

$$\left(\frac{n}{p} \right) \stackrel{\text{def}}{=} [n]_p^{(p-1)/2} = \begin{cases} 1 & \text{если } [n] \text{ ненулевой квадрат в } \mathbb{F}_p \\ 0 & \text{если } [n] = [0] \text{ в } \mathbb{F}_p \\ -1 & \text{если } [n] \text{ не квадрат в } \mathbb{F}_p \end{cases}$$

называется *символом Лежандра* числа n по модулю p .

а) Докажите, что $\left(\frac{mn}{p} \right) = \left(\frac{m}{p} \right) \left(\frac{n}{p} \right)$. б) Вычислите $\sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p} \right)$.

в*) Сравните знак $\left(\frac{m}{p} \right)$ со знаком произведения $\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin(2\pi mj/p) / \sin(2\pi j/p)$, разложите в нём каждое отношение синусов по формулам из [зад. АЛ2♦9](#) и докажите для простых натуральных $p, q > 2$ *квадратичный закон взаимности*: $\left(\frac{p}{q} \right) \cdot \left(\frac{q}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$.

г*) Найдите $\left(\frac{43}{179} \right)$.

АЛ2♦11 (учите анализ). Для произвольного $f \in \mathbb{C}[x]$ положительной степени докажите, что:

а) для любого $c \in \mathbb{R}$ найдётся такой круг $D \subset \mathbb{C}$, что $|f(z)| > c$ для всех $z \notin D$

б*) в любом круге $D \subset \mathbb{C}$ есть такая точка $z_0 \in D$, что $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ для всех $z \in D$

в*) существует такое $z_0 \in \mathbb{C}$, что $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ для всех $z \in \mathbb{C}$

г*) если $f(z_0) \neq 0$, то вблизи z_0 найдётся такое $z \in \mathbb{C}$, что $|f(z)| < |f(z_0)|$

д*) f имеет корень в $\mathbb{C}$.

¹ Дискриминантом приведённого многочлена $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$ называется произведение $\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8			
9а			
б			
10а			
б			
в			
г			
11а			
б			
в			
г			
д			