

Рациональные функции и ряды

АЛЗ♦1. Для всех $m, n \in \mathbb{N}$ вычислите $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{k}{n}$.

АЛЗ♦2. Укажите в $\mathbb{Z}[[x]] \setminus \mathbb{Q}(x)$ ряд с коэффициентами 0 и 1.

АЛЗ♦3. Пусть $p_m(n)$ равно количеству диаграмм Юнга¹ из n клеток и $\leq m$ строк, а $p_m(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Выразите $p_m(n)$ через $p_{m-1}(n)$ и $p_m(n-m)$ и покажите, что $\sum_{n \geq 0} p_m(n) t^n \in \mathbb{Q}(t)$.

АЛЗ♦4* (теорема Эйлера о пятиугольных числах). Пусть $p(n)$ равно числу всех диаграмм Юнга из n клеток, а $p_q^\vee(n)$ и $p_n^\vee(n)$ — количествам тех из них, где нет строк одинаковой длины и которые имеют, соответственно, чётное и нечётное число строк. Также пусть $p(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ и $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} p(n) t^n \in \mathbb{Q}[[t]]$. Покажите, что а) $P(t) = \prod_{k \geq 1} (1 - t^k)^{-1}$

$$\text{б) } 1/P(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} t^n (p_q^\vee(n) - p_n^\vee(n)) \quad \text{в) } p(n) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \left(p\left(n - \frac{3k^2 - k}{2}\right) + p\left(n - \frac{3k^2 + k}{2}\right) \right).$$

г) Вычислите $p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3)$.

АЛЗ♦5. Найдите число всех различных разбиений выпуклого n -угольника на треугольники не пересекающимися нигде кроме вершин диагоналями.

АЛЗ♦6*. Убедитесь, что ряд $\text{tg}(t) = \sin(t)/\cos(t) = -i(e^{it} - e^{-it})/(e^{it} + e^{-it}) \in \mathbb{C}[[x]]$ имеет рациональные коэффициенты. Есть ли среди них отрицательные?

АЛЗ♦7*. Докажите, что у ряда $\text{td}(-t) = t/(e^t - 1) = \sum_{k \geq 0} b_k t^k / k! \in \mathbb{Q}[[x]]$ коэффициенты b_{2n} знакопеременны, а $b_{2n+1} = 0$ при $n \geq 1$.

АЛЗ♦8*. Выразите через числа b_k из предыдущей задачи коэффициенты рядов

$$\text{а) } (t/2) \cdot \text{cth}(t/2), \text{ где } \text{cth } t \stackrel{\text{def}}{=} \text{ch } t / \text{sh } t = (e^t + e^{-t}) / (e^t - e^{-t}) \quad \text{б) } (t/2) \cdot \text{ctg}(t/2) \quad \text{в) } (t/2) \cdot \text{tg}(t/2).$$

АЛЗ♦9. Пусть $\nabla: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$, $f(x) \mapsto f(x) - f(x-1)$. Покажите, что для любого $\psi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$ корректно определено линейное отображение $\psi(\nabla): \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$, и укажите такой ряд φ , что $\varphi(\nabla) = d/dx$. Много ли таких φ ?

АЛЗ♦10. Покажите, что следующие свойства линейного отображения $F: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ эквивалентны: а) F перестановочно с d/dx б) F перестановочно с ∇

в) $F = \varphi(d/dx)$ для некоторого $\varphi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$ г) $F = \psi(\nabla)$ для некоторого $\psi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$

д) F перестановочно со сдвигом $T_1: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$, $f(x) \mapsto f(x+1)$

е) F перестановочно со всеми сдвигами $T_\alpha: f(x) \mapsto f(x+\alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$.

АЛЗ♦11. Верно ли, что любые два коммутирующих со сдвигами линейных отображения $\mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ коммутируют между собой?

АЛЗ♦12 (теневой анализ²). Пусть $\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k t^k / k! \in \mathbb{Q}[[t]]$. Образ базисного монома $x^m \in \mathbb{Q}[x]$ под действием оператора $\varphi(d/dx): \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ называется m -м *многочленом Аппеля* ряда φ и обозначается $f_m(x) = \varphi(d/dx) x^m$. Покажите, что при всех целых $n \geq 0$:

$$\text{а) } \varphi_n = f_n(0)$$

$$\text{б) } f'_n(x) = n f_{n-1}(x)$$

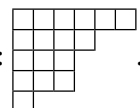
$$\text{в) } f_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{n-k}(x) y^k$$

$$\text{г) } f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi_{n-k} x^k = (\varphi^\downarrow + x)^n, \text{ где стрелка у } \varphi^\downarrow \text{ предписывает раскрывать бином } (\varphi + x)^n \text{ заменяя все } \varphi^k \text{ на } \varphi_k.$$

АЛЗ♦13*. В обозначениях [зад. АЛЗ♦7](#) докажите, что

$$1^n + \dots + m^n = \frac{(b^\downarrow + m)^{n+1} - b_{n+1}}{n+1}.$$

¹Т. е. выровненных по левому краю полосок неубывающей сверху вниз длины, например:



²По латыни: *umbral calculus*.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
9			
10			
11			
12а			
б			
в			
г			
13			