

Диаграммный поиск

Терминология. Цепочка гомоморфизмов абелевых групп $\dots \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} \dots$ называется *точной* в C , если $\ker \beta = \operatorname{im} \alpha$. Фактор группа $\operatorname{coker} \alpha \stackrel{\text{def}}{=} C / \operatorname{im} \alpha$ называется *коядром* стрелки α . Точность диаграммы

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0 \quad (1)$$

означает, что $A = \ker \beta$ и $B = \operatorname{coker} \alpha$. Такие диаграммы называются *точными тройками*. Диаграмма гомоморфизмов абелевых групп называется *коммутативной*, если для любых групп A, B в ней композиция стрелок, ведущих из A в B , зависит только от A и B , но не от пути, вдоль которого вычисляется композиция.

A6 $\frac{1}{2}$ ♦1. Для абелевой группы X и гомоморфизма абелевых групп $\varphi : A \rightarrow B$ положим

$$\begin{aligned} \varphi_* : \operatorname{Hom}(X, A) &\rightarrow \operatorname{Hom}(X, B), \quad \alpha \mapsto \varphi \alpha, \\ \varphi^* : \operatorname{Hom}(B, X) &\rightarrow \operatorname{Hom}(A, X), \quad \beta \mapsto \beta \varphi. \end{aligned}$$

Убедитесь, что $(\varphi \psi)_* = \varphi_* \psi_*$, а $(\varphi \psi)^* = \psi^* \varphi^*$, и покажите, что если тройка (1) точна, то последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \operatorname{Hom}(X, A) &\xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Hom}(X, C) \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Hom}(X, B) \\ 0 \rightarrow \operatorname{Hom}(B, X) &\xrightarrow{\beta^*} \operatorname{Hom}(C, X) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Hom}(A, X) \end{aligned} \quad (2)$$

тоже точны, причём самые правые стрелки в них не обязательно сюръективны.

A6 $\frac{1}{2}$ ♦2. Покажите, что если для любой абелевой группы X последовательность (2) точна и правая стрелка в ней сюръективна, то тройка (1), из которой она получается, тоже точна.

A6 $\frac{1}{2}$ ♦3. Постройте для любой композиции гомоморфизмов $\beta \alpha$ точную последовательность

$$0 \rightarrow \ker \alpha \rightarrow \ker \beta \alpha \rightarrow \ker \beta \rightarrow \operatorname{coker} \alpha \rightarrow \operatorname{coker} \beta \alpha \rightarrow \operatorname{coker} \beta \rightarrow 0.$$

A6 $\frac{1}{2}$ ♦4 (лемма о змее). Покажите, что каждая из коммутативных диаграмм вида

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \\ 0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

с точными строками однозначно достраивается до коммутативной диаграммы вида

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

постройте гомоморфизм $\delta : \ker \gamma \rightarrow \operatorname{coker} \alpha$, включающийся в точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker \alpha \xrightarrow{\varphi} \ker \beta \xrightarrow{\psi} \ker \gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \alpha \xrightarrow{[\varphi']} \operatorname{coker} \beta \xrightarrow{[\psi']} \operatorname{coker} \gamma \longrightarrow 0,$$

и выясните, влечёт ли обратимость стрелки β инъективность стрелки α и сюръективность стрелки γ , а обратимость стрелок α и γ — обратимость стрелки β .

A6½♦5. Для коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & D_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & D_2 \end{array}$$

постройте точные в среднем члене последовательности:

а) $\ker \beta \rightarrow \ker \gamma \rightarrow \ker \delta$ в предположении, что $\operatorname{coker} \alpha = 0$

б) $\operatorname{coker} \alpha \rightarrow \operatorname{coker} \beta \rightarrow \operatorname{coker} \gamma$ в предположении, что $\ker \delta = 0$.

A6½♦6 (лемма о пяти гомоморфизмах). Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 & \longrightarrow & X_4 & \longrightarrow & X_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ Y_1 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Y_3 & \longrightarrow & Y_4 & \longrightarrow & Y_5 \end{array}$$

строки точны, φ_1 сюръективен, φ_5 инъективен, а φ_2 и φ_4 обратимы. Покажите, что φ_3 тоже обратим.