Дополнительные задачи про определители и операторы

A7½◇1. Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$, где K — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Докажите в $K[x,y]$ равенство $\det(xA + yB) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{tr}(\Lambda^k A \cdot \Lambda^k B^\vee)\, x^k y^{n-k}$, где $\Lambda^k A$, $\Lambda^k B^\vee$ — матрицы размера $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$, клетки которых нумеруются k-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, имеющие в позиции IJ соответственно k-минор a_{IJ} матрицы A и алгебраическое дополнение $(-1)^{|I|+|J|} b_{\overline{JI}}$ к k-минору b_{JI} матрицы B.

A7½◇2 (соотношения Якоби). Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ — квадратная матрица над коммутативным кольцом K с единицей, и матрица $\Lambda^{n-1} A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ имеет в позиции (i, j) дополнительный к i-той строке и j-му столбцу минор порядка $n-1$ в матрице A. Для всех I, J, k покажите, что (IJ)-тый $k \times k$ минор матрицы $\Lambda^{n-1} A$ равен $\det^{k-1}(A) \cdot (-1)^{|I|+|J|} a_{\overline{IJ}}$, где $(-1)^{|I|+|J|} a_{\overline{IJ}}$ — это алгебраическое дополнение к (IJ)-му минору матрицы A. Например, при $k = 2$ и $n = 3, 4$ для правого нижнего углового 2×2-минора имеем:

$$\det \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

A7½◇3 (конденсация Доджсона[1]). Напишем элементы квадратной матрицы пореже и поставим в центр каждой 2×2-подматрицы, образованной парами соседних строк и столбцов, определитель этой подматрицы. Например:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -5 & & -1 & & -5 & & 1 \\ & 13 & & -9 & & -14 & \\ 3 & & -2 & & -1 & & 3 \\ & 13 & & 13 & & 19 & \\ 2 & & 3 & & -5 & & -4 \\ & -7 & & 11 & & 33 & \\ 3 & & 1 & & 2 & & -5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Будем называть прореженные матричные элементы *основными*, а стоящие в перекрестьях между ними элементы — *насыщающими*. К полученной насыщенной матрице последовательно применяем такую процедуру: стираем внешний контур основных элементов (при этом бывшие насыщающие элементы становятся основными, а оставшиеся основные — насыщающими) и заменяем каждый насыщающий элемент образовавшейся матрицы меньшего размера на делённый на этот насыщающий элемент определитель окружающей его 2×2-матрицы основных элементов. Например, для матрицы (1) получаем:

$$(1) \mapsto \begin{pmatrix} 13 & & -9 & & -14 \\ & -143 & & -11 & \\ 13 & & 13 & & 19 \\ & 78 & & -44 & \\ -7 & & 11 & & 33 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -143 & & -11 \\ & 550 & \\ 78 & & -44 \end{pmatrix} \mapsto 550 = \det A\,.$$

Докажите, что если посчастливится не делить на нуль, то в итоге получится матрица размера 1×1, равная определителю исходной матрицы.

A7½◇4 (детерминант Сильвестра). Пусть многочлены $A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и $B(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$ имеют коэффициенты в произвольном поле $\Bbbk$, причём $a_0b_0 \neq 0$ и $n \geqslant m$. Обозначим через d_k определитель матрицы, которая получается выкидыванием по k строк и столбцов сверху, снизу, слева и справа из матрицы

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_0 & \cdots & \cdots & a_n \\ & & & b_0 & \cdots & b_m \\ & & \iddots & \iddots & \iddots & \\ & \iddots & \iddots & \iddots & & \\ b_0 & \cdots & b_m & & & \end{pmatrix}}_{m+n} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

(в верхней и нижней части матрицы выписаны строки коэффициентов многочленов A и B, последовательно сдвигаемые на единицу вправо от строки к строке при движении сверху вниз и снизу вверх соответственно; все остальные элементы матрицы нулевые). Покажите, что индекс первого ненулевого члена последовательности d_0, d_1, $d_2, \ldots$ равен $\deg \text{НОД}(A, B)$.

A7½◇5. Опишите с точностью до изоморфизма[2] все пары (A, f), где A — конечная аддитивная абелева группа, а $f \in \operatorname{End} A$ имеет $f^2 = -\mathrm{Id}_A$.

A7½◇6. Классифицируйте все конечно порождённые модули над кольцом $\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$.

---

[1]Вне математики более известного как Льюис Кэрролл.

[2]Пары (A, f) и (B, g) изоморфны, если имеется такой изоморфизм абелевых групп $h : A \xrightarrow{\sim} B$, что $g = hfh^{-1}$.