Пространства с оператором

АЛ7⋄1. Всякая ли квадратная матрица сопряжена своей транспонированной?

АЛ7⋄2. Пусть $m \geqslant n$. Для любых линейных отображений $F : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ и $G : \Bbbk^m \to \Bbbk^n$ над любым полем $\Bbbk$ вычислите отношение характеристических многочленов $\chi_{FG}(t)/\chi_{GF}(t)$.

АЛ7⋄3. Перечислите все импликации между следующими свойствами линейного оператора $F : V \to V$ над произвольным полем $\Bbbk$: **а)** у F есть циклический вектор **б)** $\mu_F = \chi_F$ **в)** $Z_F \overset{\text{def}}{=} \{G \in \mathrm{End}(V) \mid FG = GF\}$ совпадает с $\Bbbk[F] \overset{\text{def}}{=} \{h(F) \mid h \in \Bbbk[t]\}$.

АЛ7⋄4. Пусть линейный оператор L над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ перестановочен со всеми операторами из $Z_F \overset{\text{def}}{=} \{G \in \mathrm{End}(V) \mid FG = GF\}$. Верно ли, что $L \in \Bbbk[F]$?

АЛ7⋄5. Вычислите $\mathrm{Hom}_{\Bbbk[x]}\big(\Bbbk[x]/(f), \Bbbk[x]/(g)\big)$ и найдите его размерность.

АЛ7⋄6. Найдите ЖНФ квадрата $J_m^2(\lambda)$ жордановой клетки размера $m \times m$ с собственным числом **а)** $\lambda \neq 0$ **б)** $\lambda = 0$.

АЛ7⋄7. Существуют ли $(n+1)$-мерные векторные подпространства в $\mathrm{End}(\Bbbk^n)$, состоящие из попарно перестановочных диагонализуемых операторов $\Bbbk^n \to \Bbbk^n$?

АЛ7⋄8. Покажите, что любые два коммутирующих линейных оператора $F, G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ в некотором базисе можно одновременно записать верхнетреугольными матрицами.

АЛ7⋄9* (лемма Барта). Докажите, что над алгебраически замкнутым полем любые два линейных оператора F, G с $\mathrm{rk}(FG - GF) = 1$ имеют общий собственный вектор.

АЛ7⋄10. Равносильна ли нильпотентность линейного оператора F над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ тому, что $\mathrm{tr}\, F^k = 0$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$, если **а*)** $\mathrm{char}\, \Bbbk = 0$ **б)** $\mathrm{char}\, \Bbbk \neq 0$?

АЛ7⋄11. Пусть операторы F и G таковы, что $FG - GF = G$. Верно ли, что G нильпотентен?

АЛ7⋄12. Всюду плотны ли матрицы с циклическим вектором **а)** в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ **б)** в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$?

АЛ7⋄13* (принцип расщепления). Покажите, что: **а)** диагонализуемые операторы всюду плотны в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ **б)** если утверждение про матрицу A записывается системой полиномиальных соотношений с целыми коэффициентами на матричные элементы a_{ij}, то из его справедливости для какого-нибудь всюду плотного множества матриц A в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ или в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ вытекает, что оно верно для всех матриц над любым коммутативным кольцом **в)** если система полиномиальных соотношений на a_{ij} из предыдущего пункта не меняется при заменах $A \mapsto CAC^{-1}$ с произвольным[1] $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, то её достаточно проверить для диагональных комплексных матриц **г)** чтобы доказать тождество Гамильтона – Кэли $\chi_A(A) = 0$ для всех матриц A над любым коммутативным кольцом, его достаточно проверить для диагональных комплексных матриц (и сделайте эту проверку).

АЛ7⋄14*. Свяжем с матрицей $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, где K — любое коммутативное кольцо, линейные отображения $L_A, R_A, \mathrm{ad}_A, \mathrm{Ad}_A : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K)$, заданные правилами **а)** $L_A(X) = AX$ **б)** $R_A(X) = XA$ **в)** $\mathrm{ad}_A(X) = AX - XA$ **г)** $\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$ (тут предполагается, что в K есть единица, и матрица A обратима). С помощью принципа расщепления найдите их следы и определители.

АЛ7⋄15*. Те же вопросы про линейные эндоморфизмы, которые матрица A задаёт на пространстве **а)** грассмановых **б)** обычных однородных многочленов степени 2 от строки переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ по правилу $f(\xi) \mapsto f(\xi A)$.

[1] Т. е. является утверждением не про матрицу A, но про линейный оператор $\alpha : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с матрицей A в некотором базисе.

Персональный табель ______________________________________. **Листок № 7 (29.01.2026)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9			
10а			
б			
11			
12а			
б			
13а			
б			
в			
г			
14а			
б			
в			
г			
15а			
б			