Примеры групп

АЛ8◇1. Симметрическая группа S_n стандартно действует на множестве $X = \{1, \dots, n\}$. Опишите орбиты диагонального действия S_n на X^m при $m \leqslant n$ (начните с $m = 2, 3, \dots$).

АЛ8◇2. Конечная группа транзитивно действует на множестве из не менее двух элементов. Всегда ли в ней есть элемент, действующий без неподвижных точек?

АЛ8◇3*. Можно ли в игре «15» осуществить транспозицию фишек «1» и «2» так, чтобы все остальные фишки в результате оказались на своих исходных местах?

АЛ8◇4 (Н. Н. Константинов). В городе N разрешаются лишь простые двусторонние обмены квартир[1], причём в течение одного дня каждому жителю разрешается сделать не более одного обмена. Можно ли за два дня осуществить любой, сколь угодно сложный обмен[2]?

АЛ8◇5 (простота группы SO_3). Обозначим через $R_{v,\varphi} \in \mathrm{SO}_3$, где $v \in \mathbb{R}^3$, $\varphi \in \mathbb{R}$, поворот вокруг оси, направленной вдоль вектора v, на угол φ по ЧС, если смотреть вдоль v. Покажите, что $FR_{v,\varphi}F^{-1} = R_{Fv,\varphi}$ для всех $F \in \mathrm{SO}_3$, и докажите, что группа SO_3 проста.

АЛ8◇6. При каких m и n группа диэдра D_{mn} изоморфна $D_m \times \mathbb{Z}/(n)$?

АЛ8◇7*. Докажите, что любая подгруппа, индекс которой равен наименьшему делящему порядок группы простому числу, нормальна.

АЛ8◇8. Пусть при каждом $k \in \mathbb{N}$ число элементов порядка k в конечных группах G и H одинаково. Верно ли, что $G \simeq H$?

АЛ8◇9. Пусть в некоторой группе подгруппа H нормализует подгруппу N, т. е. $hgh^{-1} \in N$ для всех $g \in N$, $h \in H$. Покажите, что $HN = NH$ является подгруппой, $N \lhd HN$, $H \cap N \lhd H$ и $HN/N \simeq H/(H \cap N)$.

АЛ8◇10 (лемма о бабочке). Пусть четыре подгруппы A, B, C, D некой группы таковы, что $A \lhd B$ и $C \lhd D$. Покажите, что $(B \cap D)C/(A \cap D)C \simeq (B \cap D)/(A \cap D)(B \cap C) \simeq A(B \cap D)/A(B \cap C)$.

АЛ8◇11. Опишите группу автоморфизмов группы **а)** $\mathbb{Z}/(n)$ **б)** $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ **в)** D_3 **г)** D_4 **д)** Q_8.

АЛ8◇12. У каких групп из предыдущей задачи все автоморфизмы являются внутренними?

АЛ8◇13*. Какие значения принимает двойное отношение[3] $\vartheta \in \Bbbk \smallsetminus \{0, 1\}$ четырёх разных точек на $\mathbb{P}_1(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \Bbbk \sqcup \infty$, где $\Bbbk$ — произвольное поле, под действием группы S_4, переставляющей эти точки? При каких ϑ этих значений получится меньше, чем для общего ϑ?

АЛ8◇14. Постройте изоморфизмы: **а)** $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) ⥲ S_3$ **б)** $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) ⥲ S_4$ и $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) ⥲ A_4$ **в)** $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4) ⥲ A_5$ **г*)** $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) ⥲ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ **д*)** $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9) ⥲ A_6$.

АЛ8◇15*. Постройте изоморфизмы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) ⥲ S_5$, рассмотрев: **а)** действие $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ сопряжениями на множестве нелинейных[4] инволюций без неподвижных точек на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ **б)** вложение $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \hookrightarrow S_6$ и действие $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ левыми умножениями на $S_6/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$.

АЛ8◇16*. Постройте внешний автоморфизм группы S_6 и докажите, что $\mathrm{Aut}\, S_6/\mathrm{Int}\, S_6 \simeq \mathbb{Z}/(2)$.

АЛ8◇17*. Докажите, что $\mathrm{Aut}\, S_n = \mathrm{Int}\, S_n$ при всех[5] $n \neq 6$.

---

[1] Когда A въезжает в квартиру, принадлежавшую B, а B — в квартиру, принадлежавшую A; все более сложные комбинации, скажем, когда A въезжает в квартиру, принадлежавшую B, B — в квартиру, принадлежавшую C, а уже C — в квартиру, принадлежавшую A, запрещены.

[2] Т. е. произвольную биекцию из множества квартир в себя.

[3] *Двойное отношение* $[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} : \frac{c-b}{c-a} \in \Bbbk \smallsetminus \{0, 1\}$ равно образу точки d при (единственном) дробно линейном преобразовании $\mathbb{P}_1 ⥲ \mathbb{P}_1$, $t \mapsto \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$, переводящем a, b, c в ∞, 0, 1.

[4] Т. е. не лежащих в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$. На шеститочечном множестве $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{F}_5^2)$ имеется 15 инволюций без неподвижных точек, и ровно 10 из них лежат в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$. Последние находятся в биекции с такими точками проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2\mathbb{F}_5^2)$, которые не являются произведениями ab точек $a, b \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{F}_5^2)$. Ср. с примером 18.5 на стр. 233 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_18.pdf.

[5] подсказка: автоморфизм S_n внутренний если и только если он переводит транспозиции в транспозиции.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 8 (16.02.2025)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11а			
б			
в			
г			
д			
12			
13			
14а			
б			
в			
г			
д			
15а			
б			
16			
17			