

Дроби и ряды

АС3♦1. Чему равен коэффициент при $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ у $(x_1 + \dots + x_m)^n$? У какого из многочленов $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$ или $(1 - x^2 + x^3)^{1000}$ больше коэффициент при x^{17} ?

АС3♦2. Найдите коэффициент при x^m у $\sum_{i=k}^n (1+x)^i$.

АС3♦3. Пусть $(1+x+x^2)^n = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$. Найдите: а) $a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - \dots - a_{2n-1} a_{2n}$
 б) $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1}^2$ в) $\sum_{k \geq 0} a_{2k}$ г) $\sum_{k \geq 0} a_{2k+1}$.

АС3♦4. Докажите для любого $f \in \mathbb{K}[x]$ степени $\deg f < n$ равенства:

- а) $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{f(\alpha_i)/g'(\alpha_i)}{x - \alpha_i}$, если $g(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ и все $\alpha_i \in \mathbb{K}$ различны
 б) $\frac{f(x)}{(x - \alpha)^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)/i!}{(x - \alpha)^{n-i}}$, где $f^{(i)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^i f$.

АС3♦5. Разложите на простейшие дроби следующие рациональные функции:

- а) $(3x^2 + x + 1)/(-6x^3 - 7x^2 + 1)$ б) $(x^4 + 1)/(x^2 + x - 6)$ в) $(x^3 - 1)/(x^4 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + 1)$.

АС3♦6. Явно разложите в ряды в $\mathbb{Q}[[x]]$ все дроби из предыдущей задачи, а также функции:

- а) $1/(1+x+x^2)$ б) $1/(1+x+x^2)^2$ в) $1/(2x^2 - 3x + 1)$ г) $1/(x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12)$
 д) $\sqrt[3]{1+2x}$ е) $1/\sqrt{1-3x}$ ж) $\cos x \stackrel{\text{def}}{=} (e^{ix} + e^{-ix})/2$ з) $\sin x \stackrel{\text{def}}{=} (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$
 и) $\operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} (e^x + e^{-x})/2$ к) $\operatorname{sh} x \stackrel{\text{def}}{=} (e^x - e^{-x})/2$.

АС3♦7. Найдите k -тый член последовательности a_k , если:

- а) $a_0 = 1, a_1 = -1$ и $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}$ при $k \geq 2$
 б) $a_0 = 1, a_1 = -7$ и $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ при $k \geq 2$
 в) $a_0 = 2, a_1 = 4$ и $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2}$ при $k \geq 2$
 г) $a_0 = -1/4, a_1 = -1/2$ и $a_k = -a_{k-1} - a_{k-2}$ при $k \geq 2$
 д) $a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = 48, a_k = a_{k-1} + 8a_{k-2} - 12a_{k-3}$ при $k \geq 3$
 е) $a_0 = 1, a_1 = -9, a_2 = 14, a_k = -a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}$ при $k \geq 3$
 ж) $a_0 = 1, a_1 = -3, a_2 = -29$ и $a_k = 9a_{k-1} - 26a_{k-2} + 24a_{k-3}$ при $k \geq 3$.

АС3♦8. Пользуясь разложениями $(1-x)^{\pm 1/2}$ в $\mathbb{Q}[[x]]$, вычислите:

- а) $\binom{2k}{k} + \binom{2}{1} \binom{2k-2}{k-1} + \binom{4}{2} \binom{2k-4}{k-2} + \dots + \binom{2k-2}{k-1} \binom{2}{1} + \binom{2k}{k}$
 б) $\binom{2k-2}{k-1} + \frac{1}{2} \binom{2}{1} \binom{2k-4}{k-2} + \frac{1}{3} \binom{4}{2} \binom{2k-6}{k-3} + \dots + \frac{1}{k-1} \binom{2k-4}{k-2} \binom{2}{1} + \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1}$
 в) $\frac{2^{2k-1}}{1} - \frac{2^{2k-3}}{2} \binom{2}{1} - \frac{2^{2k-5}}{3} \binom{4}{2} - \dots - \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1}$
 г) $\frac{1}{1 \cdot (k-1)} \binom{2k-4}{k-2} + \frac{1}{2 \cdot (k-2)} \binom{2}{1} \binom{2k-6}{k-3} + \frac{1}{3 \cdot (k-3)} \binom{4}{2} \binom{2k-8}{k-4} + \dots$
 $\dots + \frac{1}{(k-2) \cdot 2} \binom{2k-6}{k-3} \binom{2}{1} + \frac{1}{(k-1) \cdot 1} \binom{2k-4}{k-2}$

АС3♦9. Верно ли, что для любого многочлена $p \in \mathbb{K}[x]$ ряд $\sum_{k \geq 0} p(k)x^k$ является рациональной функцией из $\mathbb{K}(x) \subset \mathbb{K}((x))$?

АС3♦10*. Лежат ли ряды а) e^x б) $\ln(1+x)$ в) $\sqrt{1+x}$ в подполе $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{Q}((x))$?

АС3♦11. Найдите первую дюжину коэффициентов ряда Тодда $\operatorname{td}(x) = x/(1-e^{-x})$ и вычислите $\operatorname{td}(x) - \operatorname{td}(-x)$.

АС3♦12. Найдите $\operatorname{td}(d/dx)x^n$ и $\sum_{k=0}^m k^n$ для всех $0 \leq n \leq 6$.

АС3♦13*. Вычислите сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел¹.

¹Во времена, когда не было никаких вычислительных машин кроме счёт, Яков Бернулли (1654–1705) сделал это быстрее, чем за половину четверти часа.