Дроби и ряды

АС3◇1. Чему равен коэффициент при $x_1^{\alpha_1}\dots x_m^{\alpha_m}$ у $(x_1+\dots+x_m)^n$? У какого из многочленов $(1+x^2-x^3)^{1000}$ или $(1-x^2+x^3)^{1000}$ больше коэффициент при x^{17}?

АС3◇2. Найдите коэффициент при x^m у $\sum_{i=k}^n (1+x)^i$.

АС3◇3. Пусть $(1+x+x^2)^n=\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$. Вычислите: **а)** $a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\dots-a_{2n-1}a_{2n}$ **б)** $\sum_{k\geqslant 0} a_{2k}$ **в)** $\sum_{k\geqslant 0} a_{2k+1}$. **г*)** Выразите $a_0^2-a_1^2+a_2^2-\dots+(-1)^{n-1}a_{n-1}^2$ через a_n.

АС3◇4. Докажите для любого $f\in\Bbbk[x]$ степени $\deg f<n$ равенства:

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\sum_{i=1}^n \dfrac{f(\alpha_i)/g'(\alpha_i)}{x-\alpha_i}$, если $g(x)=(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$ и все $\alpha_i\in\Bbbk$ различны

б) $\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^n}=\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{f^{(i)}(\alpha)/i!}{(x-\alpha)^{n-i}}$, где $f^{(i)}=\left(\frac{d}{dx}\right)^i f$.

АС3◇5. Разложите на простейшие дроби следующие рациональные функции:

а) $(3x^2+x+1)/(-6x^3-7x^2+1)$ **б)** $(x^4+1)/(x^2+x-6)$ **в)** $(x^3-1)/(x^4-4x+6x^2-4x^3+1)$.

АС3◇6. Явно разложите в ряды в $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ все дроби из предыдущей задачи, а также функции:

а) $1/(1+x+x^2)$ **б)** $1/(1+x+x^2)^2$ **в)** $1/(2x^2-3x+1)$ **г)** $1/(x^4+2x^3-7x^2-20x-12)$

д) $\sqrt[3]{1+2x}$ **е)** $1/\sqrt{1-3x}$ **ж)** $\cos x\stackrel{\text{def}}{=}(e^{ix}+e^{-ix})/2$ **з)** $\sin x\stackrel{\text{def}}{=}(e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$

и) $\operatorname{ch}x\stackrel{\text{def}}{=}(e^x+e^{-x})/2$ **к)** $\operatorname{sh}x\stackrel{\text{def}}{=}(e^x-e^{-x})/2$.

АС3◇7. Найдите k-тый член последовательности a_k, если:

а) $a_0=1$, $a_1=-1$ и $a_k=2a_{k-1}-a_{k-2}$ при $k\geqslant 2$

б) $a_0=1$, $a_1=-7$ и $a_k=5a_{k-1}-6a_{k-2}$ при $k\geqslant 2$

в) $a_0=2$, $a_1=4$ и $a_k=4a_{k-1}-4a_{k-2}$ при $k\geqslant 2$

г) $a_0=-1/4$, $a_1=-1/2$ и $a_k=-a_{k-1}-a_{k-2}$ при $k\geqslant 2$

д) $a_0=5$, $a_1=3$, $a_2=48$, $a_k=a_{k-1}+8a_{k-2}-12a_{k-3}$ при $k\geqslant 3$

е) $a_0=1$, $a_1=-9$, $a_2=14$, $a_k=-a_{k-1}+a_{k-2}+a_{k-3}$ при $k\geqslant 3$

ж) $a_0=1$, $a_1=-3$, $a_2=-29$ и $a_k=9a_{k-1}-26a_{k-2}+24a_{k-3}$ при $k\geqslant 3$.

АС3◇8. Пользуясь разложениями $(1-x)^{\pm 1/2}$ в $\mathbb{Q}[\![x]\!]$, вычислите:

а) $\binom{2k}{k}+\binom{2}{1}\binom{2k-2}{k-1}+\binom{4}{2}\binom{2k-4}{k-2}+\dots+\binom{2k-2}{k-1}\binom{2}{1}+\binom{2k}{k}$

б) $\binom{2k-2}{k-1}+\frac{1}{2}\binom{2}{1}\binom{2k-4}{k-2}+\frac{1}{3}\binom{4}{2}\binom{2k-6}{k-3}+\dots+\frac{1}{k-1}\binom{2k-4}{k-2}\binom{2}{1}+\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}$

в) $\dfrac{2^{2k-1}}{1}-\dfrac{2^{2k-3}}{2}\binom{2}{1}-\dfrac{2^{2k-5}}{3}\binom{4}{2}-\dots-\dfrac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}$

г) $\dfrac{1}{1\cdot(k-1)}\binom{2k-4}{k-2}+\dfrac{1}{2\cdot(k-2)}\binom{2}{1}\binom{2k-6}{k-3}+\dfrac{1}{3\cdot(k-3)}\binom{4}{2}\binom{2k-8}{k-4}+\dots$
$\dots+\dfrac{1}{(k-2)\cdot 2}\binom{2k-6}{k-3}\binom{2}{1}+\dfrac{1}{(k-1)\cdot 1}\binom{2k-4}{k-2}$

АС3◇9. Верно ли, что для любого многочлена $p\in\Bbbk[x]$ ряд $\sum_{k\geqslant 0}p(k)x^k$ является рациональной функцией из $\Bbbk(x)\subset\Bbbk(\!(x)\!)$?

АС3◇10*. Лежат ли ряды **а)** e^x **б)** $\ln(1+x)$ **в)** $\sqrt{1+x}$ в подполе $\mathbb{Q}(x)\subset\mathbb{Q}(\!(x)\!)$?

АС3◇11. Найдите первую дюжину коэффициентов ряда Тодда $\operatorname{td}(x)=x/(1-e^{-x})$ и вычислите $\operatorname{td}(x)-\operatorname{td}(-x)$.

АС3◇12. Найдите $\operatorname{td}(d/dx)\,x^n$ и $\sum_{k=0}^m k^n$ для всех $0\leqslant n\leqslant 6$.

АС3◇13*. Вычислите сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел[1].

[1] Во времена, когда не было никаких вычислительных машин кроме счёт, Яков Бернулли (1654–1705) сделал это быстрее, чем за половину четверти часа.