

Модули и матрицы

АС5♦1. Модуль с одной образующей называется *циклическим*. Верно ли, что

- а) всякий подмодуль циклического $\mathbb{Z}$ -модуля является циклическим
- б) всякий циклический $\mathbb{Z}$ -модуль изоморфен либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}/(n)$
- в) $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{Z}/(n) \oplus \mathbb{Z}/(m)$ циклический если и только если $\text{НОД}(m, n) = 1$.

АС5♦2. Являются ли циклическими $\mathbb{Z}$ -модули а) $\mathbb{Z}^2$ б) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n)$?

АС5♦3. Опишите фактор модуля $\mathbb{Z}^2$ по подмодулю, порождённому векторами $(2, 1)$ и $(1, 2)$.

АС5♦4. Модуль M называется *полупростым*, если для любого подмодуля $N \subset M$ существует такой подмодуль $L \subset M$, что $M = L \oplus N$. Полупросты ли $\mathbb{Z}$ -модули: а) $\mathbb{Z}^k$ б) $(\mathbb{Z}/(p))^k$ в) $\mathbb{Z}/(p^k)$, где p — простое?

АС5♦5. Опишите $\mathbb{Z}$ -модули а) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(12), \mathbb{Z}/(18))$ б) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(18), \mathbb{Z}/(12))$ в) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}/(8))$ г) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(16), \mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(8))$.

АС5♦6. Пусть матрица A имеет столбцы (слева направо) c_1, c_2, c_3 и строки (сверху вниз) r_1, r_2, r_3, r_4 . На какую матрицу и с какой стороны надлежит умножить матрицу A , чтобы получилась матрица а) со строками (сверху вниз) $r_3 + 2r_4, 3r_1 + 2r_2 + r_3, r_1 - r_2 + r_3 - r_4$ б) со столбцами (слева направо) $c_1 + 2c_2, 2c_2 + 3c_3, 3c_3 + 4c_1, 5c_1 + 6c_2, c_1 + c_2 + c_3$?

АС5♦7. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. Обозначим через $E_{ij} \in \text{Mat}_n(K)$ матрицу с единицей в клетке (i, j) и нулями в остальных клетках. Составьте таблицу:

- а) произведений $E_{ij}E_{kl}$ б) коммутаторов $[E_{ij}, E_{kl}] \stackrel{\text{def}}{=} E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}$ и
- в) опишите центр¹ алгебры $\text{Mat}_n(K)$.

АС5♦8. Укажите в $\text{Mat}_3(\mathbb{Q})$ какую-нибудь матрицу X с $X^3 = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 32 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

АС5♦9. Найдите: а) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2022}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

АС5♦10 (унипотентные матрицы). Матрица $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$, где $\mathbb{k}$ — поле, называется *унипотентной*, если $A = E + N$, где N нильпотентна. Покажите, что а) при $\text{char } \mathbb{k} > 0$ для любой унипотентной матрицы A найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $A^n = E$ б) при $\text{char } \mathbb{k} = 0$ унипотентность A равносильна наличию такой нильпотентной матрицы B , что $A = e^B$.

АС5♦11. Покажите, что однородные симметрические² многочлены $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ степени n образуют свободный $\mathbb{Z}$ -модуль и найдите его ранг для всех $2 \leq m, n \leq 5$.

АС5♦12. Выясните, являются ли многочлены а) $\sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$ б) $\sum_{j < k} \sum_{i \notin \{j, k\}} x_i (x_j - x_k)^2$ в) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ г) $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)$ симметрическими, и если да, выразите их через $e_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$.

АС5♦13. Выразите дискриминант³ кубического трёхчлена $x^3 + px + q$ через p и q .

АС5♦14. Найдите все комплексные решения системы уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24.$$

АС5♦15. Найдите сумму 4-х степеней комплексных корней многочлена $x^3 - 3x - 1$.

¹Центром алгебры A называется подалгебра $Z(A) = \{a \in A \mid \forall b \in A \ ab = ba\}$.

²Многочлен $f \in K[x_1, \dots, x_m]$ называется *симметрическим*, если $f(x_1, \dots, x_m) = f(x_{g(1)}, \dots, x_{g(m)})$ для любой биекции $g: \{1, \dots, m\} \simeq \{1, \dots, m\}$.

³Дискриминантом приведённого многочлена $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$ называется произведение $\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.