Метод Гаусса

АС6◇1. Найдите нормальную форму Смита D_A и укажите такие обратимые над $\mathbb{Z}$ квадратные матрицы L и R, что $D_A = L_A A R_A$ для следующих целочисленных матриц A:

а) $\begin{pmatrix} 24 & -9 & 0 & -3 \\ -33 & 9 & 6 & 6 \\ -10 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -42 & 42 & 28 & -56 \\ -98 & 56 & 28 & -42 \\ 91 & -70 & -42 & 77 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -48 & 39 & -42 & 51 \\ -15 & -6 & -6 & 27 \\ -6 & 15 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} -34 & -15 & 24 & 36 \\ 12 & 12 & -19 & -23 \\ -14 & -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ **д)** $\begin{pmatrix} 50 & -34 & 20 & 8 \\ -30 & 35 & -15 & -13 \\ -36 & 32 & -16 & -10 \end{pmatrix}$ **е)** $\begin{pmatrix} -56 & 62 & -7 & -23 \\ -28 & 14 & 5 & -3 \\ 7 & 22 & -14 & -12 \end{pmatrix}$.

АС6◇2. Найдите все целые решения систем уравнений:

а) $\begin{cases} 35x_1 + 63x_2 - 77x_3 = -231 \\ -35x_1 - 28x_2 + 42x_3 = 126 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} -371x_1 + 105x_2 - 252x_3 = -357 \\ 133x_1 - 35x_2 + 91x_3 = 126 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 56x_1 + 28x_2 + 7x_3 = 83 \\ 196x_1 + 28x_2 - 63x_3 = 10 \\ -133x_1 - 14x_2 + 49x_3 = 14 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} -455x_1 - 189x_2 + 336x_3 = 133 \\ 196x_1 + 84x_2 - 147x_3 = -56 \\ 189x_1 + 63x_2 - 126x_3 = -63 \end{cases}$

д) $\begin{cases} -196x_1 + 294x_2 + 427x_3 = -378 \\ 399x_1 - 588x_2 - 840x_3 = 651 \\ 56x_1 - 84x_2 - 119x_3 = 84 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 26x_1 - 494x_2 - 169x_3 + 26x_4 = 390 \\ -312x_1 - 390x_2 - 78x_3 + 39x_4 = -117 \\ 234x_1 + 468x_2 + 117x_3 - 39x_4 = -39 \end{cases}$

АС6◇3. Выясните, обратимы ли идущие ниже матрицы над $\mathbb{Z}$, и если да, найдите обратные:

а) $\begin{pmatrix} 341 & -10 \\ 989 & -29 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 240 & 81 \\ 196 & 66 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 1073 & -236 \\ 341 & -75 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} -19 & 5 & -5 \\ 14 & 13 & 10 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **д)** $\begin{pmatrix} 31 & -17 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 21 & -10 & 1 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} 81 & 20 & -11 & 6 \\ 52 & 13 & -7 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **ж)** $\begin{pmatrix} -6 & -72 & -6 & 29 \\ 41 & 56 & 16 & -17 \\ -18 & -43 & -8 & 15 \\ -6 & -19 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ **з)** $\begin{pmatrix} 4 & -43 & -17 \\ 1 & -10 & -4 \\ 1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$ **и)** $\begin{pmatrix} -47 & 17 & -6 \\ -12 & 4 & -1 \\ 27 & -10 & 4 \end{pmatrix}$.

АС6◇4. Укажите взаимные базисы в $\mathbb{Z}^3$ и его подмодуле, порождённом столбцами матриц

а) $\begin{pmatrix} -70 & 59 \\ 8 & -6 \\ -25 & 22 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 91 & 49 \\ -21 & -21 \\ 28 & 7 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -46 & -16 & 15 \\ -30 & -14 & 5 \\ -20 & -2 & 13 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 78 & -13 & 65 \\ -78 & -13 & -39 \\ 78 & 0 & 52 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 28 & -35 & 100 & -33 \\ -15 & -2 & -10 & 5 \\ 10 & 23 & -39 & 10 \end{pmatrix}$ **е)** $\begin{pmatrix} 68 & -20 & 40 & -1 \\ -17 & 10 & -20 & 9 \\ -51 & 22 & -44 & 13 \end{pmatrix}$ **ж)** $\begin{pmatrix} 76 & -95 & 57 & 19 & -19 \\ 26 & -6 & -10 & -4 & 12 \\ 37 & -86 & 72 & 25 & -37 \end{pmatrix}$.

АС6◇5. Выясните, отщепляется ли решётка, порождённая столбцами матрицы

а) $\begin{pmatrix} 107 & 60 & 19 & -13 \\ -50 & -28 & -9 & 6 \\ -7 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 466 & -170 & -96 & -81 \\ -164 & 60 & 34 & 29 \\ 252 & -92 & -52 & -44 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 146 & -34 & -50 & -15 \\ 22 & -6 & -6 & -1 \\ -41 & 9 & 15 & 5 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} -32 & 679 & 413 & 78 \\ -18 & 383 & 233 & 44 \\ 4 & -87 & -53 & -10 \end{pmatrix}$.

прямым слагаемым в $\mathbb{Z}^3$, и если да, укажите какую-нибудь дополнительную решётку.

АС6◇6 (теорема о ранге). Докажите, что столбцы и строки любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ над областью главных идеалов K порождают в K^m и в K^n свободные подмодули одинакового ранга, равного числу ненулевых элементов нормальной формы Смита матрицы A.