Определители

АС8◇1. Для произвольных квадратных матриц A и B выразите через $\det A$ и $\det B$

а) $\det\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B\end{pmatrix}$ **б)** $\det\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & *\end{pmatrix}$.

АС8◇2. Как меняется определитель при отражении относительно побочной диагонали?

АС8◇3. Сколько $n\times n$ матриц определителя 1 имеется над полем из q элементов?

АС8◇4. Не прибегая к методу Гаусса вычислите

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6\end{pmatrix}^{-1}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -8 & 5\end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ -3 & 10 & -13\end{pmatrix}^{-1}$.

АС8◇5. Вычислите определитель матрицы с 1 на главной диагонали и 2 в остальных местах.

АС8◇6*. Для многочленов $f(x) = a_n\prod_{i=1}^n(x-\alpha_i)$ и $g(x) = b_m\prod_{j=1}^m(x-\beta_j)$ произведения $R(f,g) \overset{\text{def}}{=} a_n^m b_m^n \prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j)$ и $D(f) \overset{\text{def}}{=} a_n^{2n-2}\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ называются соответственно *результантом* этих многочленов и *дискриминантом* многочлена f. Выразите:

а) $D(f)$ через $R(f,f')$ **б)** $D(fg)$ через $D(f)$, $D(g)$ и $R(f,g)$.

АС8◇7. Исключите x из систем уравнений: **а)** $5x^2-6xy+5y^2-16 = 2x^2-xy+y^2-x-y-4 = 0$ **б)** $4x^2-7xy+y^2+13x-2y-3 = 9x^2-14xy+y^2+28x-4y-5 = 0$.

АС8◇8. Как связаны дискриминант приведённого многочлена $\prod_{i=1}^n(x-\alpha_i)$ и $\det(\alpha_j^{n-i})$?

АС8◇9*. Вычислите дискриминанты многочленов: **а)** $\sum_{k=0}^n x^k$ **б)** $\sum_{k=0}^n x^k/k!$ **в)** x^n+a.

АС8◇10 (циркулянт). Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$, через значения полинома $f(x) = \alpha_0x^n+\dots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n$ на корнях $\sqrt[n+1]{1}\in\mathbb{C}$.

АС8◇11. Пусть $AB = E$. Докажите соотношение $a_{IJ} = (-1)^{|I|+|J|}b_{\overline{J}\overline{I}}\det A$ на дополнительные миноры матриц A и B.

АС8◇12. Вычислите все частные производные $\frac{\partial^k\det(A)}{\partial a_{i_1j_1}\partial a_{i_2j_2}\dots\partial a_{i_kj_k}}$. Если общий случай вызывает затруднения, начните с $k=1,2$.

АС8◇13. НОД 2×2 миноров целочисленной 3×3 матрицы равен 12. Может ли её определитель быть равен **а)** 28 **б)** 36? Может ли НОД элементов этой матрицы быть равен **в)** 1 **г)** 2 **д)** 3 **е)** 4 **ж)** 5 **з)** 6? Если да — приведите пример, нет — объясните, почему.

АС8◇14. Не прибегая к методу Гаусса вычислите инвариантные множители матриц

а) $\begin{pmatrix} 15 & -6 & 3 \\ -15 & 3 & 6\end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 17 & -5 & -37 \\ -21 & 0 & 21 \\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -3 & 24 & -27 & 9 \\ 9 & 6 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

АС8◇15. Сколько элементов в факторе $\mathbb{Z}^4/L$, где $L\subset\mathbb{Z}^4$ порождается столбцами матрицы

а) $\begin{pmatrix} -6 & 8 & 0 & -7 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 6 & 3 & 6\end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 7 & -6 \\ 0 & -2 & 5 & 2\end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

АС8◇16. Существует ли комплексная 2×4 матрица с множеством 2×2 миноров

а) $\{2,3,4,5,6,7\}$ **б)** $\{3,4,5,6,7,8\}$?

Если да — приведите пример такой матрицы, если нет — объясните, почему.