Пространство с оператором

АС9◇1. Какова степень минимального многочлена квадратной матрицы ранга 1?

АС9◇2. Для приведённого многочлена $f \in \Bbbk[t]$ найдите характеристический и минимальный многочлены оператора умножения на $t : \Bbbk[t]/(f) \to \Bbbk[t]/(f)$ и покажите, что каждый перестановочный с умножением на t линейный оператор $G : \Bbbk[t]/(f) \to \Bbbk[t]/(f)$ является оператором умножения на многочлен $g(t) = G([1])$.

АС9◇3. Существует ли оператор с характеристическим и минимальным многочленами **а)** $\chi(t) = (t^6 + 1)$, $\mu(t) = (t^2 + 1)$ **б)** $\chi(t) = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu(t) = (t-1)(t-2)$ **в)** $\chi(t) = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu(t) = (t-1)^2(t-2)^3$? Если да, то приведите пример.

АС9◇4. Перечислите, с точностью до подобия, все рациональные матрицы с характеристическим многочленом **а)** $(x-2)^3$ **б)** $(x-3)^4$ **в)** $x^4 - 1$ **г)** $(x^4-1)^2$. Какие из них диагонализуемы? Какие полупросты? У каких есть циклический вектор?

АС9◇5. Для сходящегося в окрестности точки $\lambda \in \mathbb{C}$ ряда $f \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ выразите элементы матрицы[1] $f(J_n(\lambda))$ через значения f и его производных в точке λ.

АС9◇6. Есть ли циклический вектор у оператора $\mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ с матрицей $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$?

АС9◇7. Существует ли такая комплексная матрица A, что **а)** $e^A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ **б)** $e^A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **в)** $A^6 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 1 \\ -3 & -7 & -1 \\ 13 & 22 & 2 \end{pmatrix}$ **г)** $A^5 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 1 \\ -3 & -7 & -1 \\ 13 & 22 & 2 \end{pmatrix}$ **д)** $A^6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 6 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$? Если да, предъявите такую матрицу явно. Если нет, объясните почему.

АС9◇8. Вычислите: **а)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}^7$ **б)** $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -9 \\ -9 & -29 & -33 \\ 9 & 28 & 32 \end{pmatrix}^{11}$ **в)** $\begin{pmatrix} -25 & 6 & -6 \\ -27 & 6 & -7 \\ 77 & -19 & 18 \end{pmatrix}^{2023}$.

АС9◇9. Найдите минимальные многочлены и ЖНФ следующих матриц над полем $\mathbb{C}$: **а)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

АС9◇10. Найдите ЖНФ **а)** операторов $\partial/\partial x$ и $x \cdot \partial/\partial x$ на пространстве $\mathbb{C}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени $\leqslant n$ **б)** оператора $\partial/\partial x$ на пространстве $e^{cx}\mathbb{C}[x]_{\leqslant n}$ функций вида $e^{cx}f(x)$, где $c \in \mathbb{C}$ фиксировано, а $f \in \mathbb{C}[x]_{\leqslant n}$.

АС9◇11. Найдите минимальные многочлены и элементарные делители следующих матриц над полем $\mathbb{F}_5$: **а)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Какие из них диагонализуемы? Какие полупросты? У каких есть циклический вектор?

АС9◇12*. Перечислите, с точностью до подобия, все такие матрицы $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_3)$, что $A^4 = A$.

АС9◇13*. Перечислите классы подобных матриц в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ для $p = 2, 3, 5$.

[1] Напомню, что $J_n(\lambda) \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ — это жорданова клетка с собственным числом $\lambda \in \Bbbk$.