

Группы преобразований

AC10◦1. Что можно сказать о чётности порядка произвольной нечётной перестановки?

AC10◦2. Найдите 2024-26 степени и знак перестановок: а) $(3, 5, 4, 1, 2)$ б) $(4, 5, 6, 1, 2, 3)$
в) $(4, 5, 12, 6, 7, 8, 9, 11, 2, 3, 1, 10)$ г) $(13, 4, 5, 12, 6, 14, 7, 8, 9, 11, 2, 3, 1, 15, 10)$.

AC10◦3. В группах а) S_3 б) S_4 в) S_5 г) S_6 перечислите классы сопряжённости и порядки элементов и найдите количества элементов в каждом классе и каждого порядка.

AC10◦4. Те же вопросы про группы а) A_4 б) A_5 в) A_6 . Какие классы сопряжённости из S_n распадаются на несколько классов в A_n и как именно?

AC10◦5. Сколько элементов в S_6 неподвижны при сопряжении перестановками:
а) $(4, 5, 3, 6, 2, 1)$ б) $(4, 5, 6, 1, 2, 3)$ в) $(5, 6, 3, 4, 1, 2)$ г) $(4, 3, 2, 5, 6, 1)$?

AC10◦6. Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *инволюцией*, если $\sigma^2 = \text{Id}$. Верно ли, что а) перестановка является инволюцией если и только если в её цикловом типе есть только циклы длины 1 и 2? б) любой цикл $\tau \in S_n$ длины ≥ 3 является композицией двух инволюций?

AC10◦7. Говорят, что группа G порождается элементами $g_1, \dots, g_k \in G$, если любой её элемент является конечным произведением элементов g_i . Порождается ли
а) S_n циклами $|1, 2\rangle$ и $|1, 2, 3, \dots, n\rangle$? б) A_n циклами $|1, 2, 3\rangle, |1, 2, 4\rangle, \dots, |1, 2, n\rangle$?

AC10◦8. Перечислите все подгруппы в группах диэдров D_n с $n \leq 6$. Какие из них нормальны?

AC10◦9. Всякая ли конечная группа, порождённая двумя различными нетождественными инволюциями, изоморфна группе диэдра?

AC10◦10. Найдите порядок группы а) $\text{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ б) $\text{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ в) $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$.

AC10◦11. Изготовьте бумажные или какие-либо ещё модели пяти платоновых тел. Найдите длину орбиты и стабилизатор каждой точки каждого тела под действием собственной и несобственной групп этого тела. У каких платоновых тел полная группа изоморфна прямому произведению собственной группы на группу знаков $\{\pm 1\}$?

AC10◦12. Постройте изоморфизм собственной группы куба с S_4 .

AC10◦13. Укажите на поверхности додекаэдра пять кубов с вершинами в вершинах додекаэдра и постройте изоморфизм собственной группы додекаэдра с A_5 .

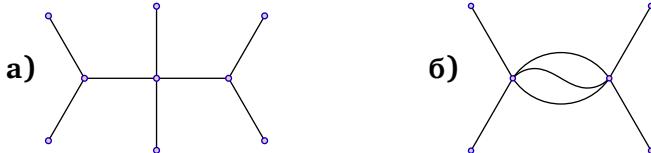
AC10◦14. Собственная группа куба действует на множествах V и E вершин и рёбер этого куба. Опишите орбиты её диагонального¹ действия на а) $V \times V$ б) $V \times E$ в) $E \times E \times E$.

AC10◦15. Найдите порядки собственной и несобственной групп а) пяти платоновых тел в \mathbb{R}^3 и правильных четырёхмерных б) куба в) кокуба² г) симплекса³ д^{*}) октаплекса⁴.

AC10◦16. Изоморфны ли собственная и полная группы правильного n -мерного симплекса группам A_{n+1} и S_{n+1} ?

AC10◦17. Имеется неограниченный запас неотличимых по форме бусин n разных цветов. Сколько различных ожерелий можно изготовить из а) 4 б) 7 в) 8 г) 9 бусин?

AC10◦18. Имеется неограниченный запас ничем кроме цвета не отличающихся друг от друга шнурочков n различных цветов. Сколько из них можно сделать разных фенечек вида



¹Если группа G действует на множествах X_1, \dots, X_m , то её *диагональное действие* на $X_1 \times \dots \times X_m$ происходит по правилу $g : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (gx_1, \dots, gx_m)$.

²Выпуклой оболочки концов векторов $\pm e_i$, где e_1, e_2, e_3, e_4 образуют стандартный базис в \mathbb{R}^4 .

³Выпуклой оболочки концов стандартных базисных векторов e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 в \mathbb{R}^5 .

⁴Выпуклой оболочки вершин кокуба и вершин вписанного в единичную сферу куба $\{x \in \mathbb{R}^4 : \forall i |x_i| \leq 1/2\}$.