

## Абстрактные группы. Коммутант. Изоморфизмы.

АС11♦1. Покажите, что любая подгруппа циклической группы тоже циклическая.

АС11♦2. Пусть группа  $G/Z(G)$  циклическая. Докажите, что  $G$  абелева.

АС11♦3. Наименьшее такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $g^n = e$  называется *порядком* элемента  $g$  и обозначается  $\text{ord } g$ . Верно ли, что:

а)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ord}(g^n) = \text{ord}(g) / \text{НОД}(n, \text{ord}(g))$

б)  $fg = gf \Rightarrow \text{ord}(fg) \mid \text{НОК}(\text{ord}(f), \text{ord}(g))$ .

АС11♦4. Чему может быть равен  $\text{ord}(fg)$ , если  $\text{ord}(gf) = n$ ?

АС11♦5. Все ли элементы нечётного порядка являются квадратами?

АС11♦6. Во всякой ли группе чётного порядка есть элемент порядка два?

АС11♦7. Покажите, что группа, все элементы которой имеют порядок два, абелева.

АС11♦8. Покажите, что любая подгруппа индекса два нормальна.

АС11♦9. Пусть  $\varphi: G_1 \twoheadrightarrow G_2$  — сюръективный гомоморфизм групп. Покажите, что полный прообраз  $N_1 = \varphi^{-1}(N_2)$  любой нормальной подгруппы  $N_2 \triangleleft G_2$  является нормальной подгруппой в  $G_1$  и  $G_1/N_1 \simeq G_2/N_2$ .

АС11♦10. Пусть две нормальные подгруппы пересекаются по единице. Покажите, что их элементы коммутируют друг с другом.

АС11♦11. Докажите, что произведение  $KH = \{kh \mid k \in K, h \in H\}$  двух подгрупп  $K, H$  является подгруппой если и только если  $KH = HK$ .

АС11♦12. Пусть произведение любых двух левых смежных классов некоторой подгруппы  $H$  также является левым смежным классом подгруппы  $H$ . Верно ли, что  $H$  нормальна?

АС11♦13. Перечислите левые и правые смежные классы группы  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$  по подгруппе верхнетреугольных матриц.

АС11♦14. Докажите, что: а) любая подгруппа, содержащая коммутант, нормальна б) коммутант нормальной подгруппы нормален.

АС11♦15. Докажите, что группа  $\text{SL}_n(\mathbb{k})$ , где  $\mathbb{k}$  — произвольное поле, порождается матрицами<sup>1</sup>  $T_{ij}(\alpha) = E + \alpha E_{ij}$ ,  $\alpha \in \mathbb{k}$ , и вычислите (групповой) коммутатор  $T_{ij}(\alpha)T_{k\ell}(\beta)T_{ij}^{-1}(\alpha)T_{k\ell}^{-1}(\beta)$  двух таких матриц, а также коммутатор трансвекции  $T_{ij}(\alpha)$  с матрицей  $D_{ij}(\gamma)$ , которая получается из  $E$  заменой  $i$ -го и  $j$ -го диагональных элементов на  $\gamma$  и  $\gamma^{-1}$ , где  $\gamma \in \mathbb{k}^\times$ .

АС11♦16. Вычислите коммутант группы а) обратимых верхнетреугольных б) унитарных матриц над произвольным полем.

АС11♦17. Докажите, что коммутант  $\text{GL}'_n(\mathbb{k}) = \text{SL}'_n(\mathbb{k}) = \text{SL}_n(\mathbb{k})$ , за исключением групп  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_2)$  и  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ , и вычислите коммутанты последних двух групп.

АС11♦18. Убедитесь, что *кватернионные единицы*  $Q_8 = \{\pm e, \pm i, \pm j, \pm k\}$  с таким умножением, что  $e$  является единицей, «минус на минус даёт плюс»,  $i^2 = j^2 = k^2 = -e$  и  $ij = -ji = k$ ,  $jk = -kj = i$ ,  $ki = -ik = j$ , образуют группу. Изоморфна ли она  $D_4$ ?

АС11♦19. Найдите все пары изоморфных групп в наборах: а)  $D_8, D_4 \times \mathbb{Z}/(2), Q_8 \times \mathbb{Z}/(2)$

б)  $S_4, D_{12}, D_6 \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(4), Q_8 \times \mathbb{Z}/(3), D_4 \times \mathbb{Z}/(3)$ .

АС11♦20. Найдите индекс подгруппы внутренних автоморфизмов в группе  $\text{Aut } A_5$ .

АС11♦21. Приведите пример таких двух не изоморфных групп  $G_1, G_2$  и их нормальных подгрупп  $H_1 \triangleleft G_1, H_2 \triangleleft G_2$ , что  $H_1 \simeq H_2$  и  $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$ .

<sup>1</sup>Линейные операторы  $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$  с такими матрицами называются *трансвекциями*.