

Абстрактные группы. Коммутант. Изоморфизмы.

AC11◦1. Покажите, что любая подгруппа циклической группы тоже циклическая.

AC11◦2. Пусть группа $G / Z(G)$ циклическая. Докажите, что G абелева.

AC11◦3. Наименьшее такое $n \in \mathbb{N}$, что $g^n = e$ называется *порядком* элемента g и обозначается $\text{ord } g$. Верно ли, что:

- a) $\forall n \in \mathbb{N} \text{ } \text{ord}(g^n) = \text{ord}(g) / \text{НОД}(n, \text{ord}(g))$
- б) $fg = gf \Rightarrow \text{ord}(fg) | \text{НОК}(\text{ord}(f), \text{ord}(g))$.

AC11◦4. Чему может быть равен $\text{ord}(fg)$, если $\text{ord}(gf) = n$?

AC11◦5. Все ли элементы нечётного порядка являются квадратами?

AC11◦6. Во всякой ли группе чётного порядка есть элемент порядка два?

AC11◦7. Покажите, что группа, все элементы которой имеют порядок два, абелева.

AC11◦8. Покажите, что любая подгруппа индекса два нормальна.

AC11◦9. Пусть $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ — сюръективный гомоморфизм групп. Покажите, что полный прообраз $N_1 = \varphi^{-1}(N_2)$ любой нормальной подгруппы $N_2 \triangleleft G_2$ является нормальной подгруппой в G_1 и $G_1 / N_1 \simeq G_2 / N_2$.

AC11◦10. Пусть две нормальные подгруппы пересекаются по единице. Покажите, что их элементы коммутируют друг с другом.

AC11◦11. Докажите, что произведение $KH = \{kh \mid k \in K, h \in H\}$ двух подгрупп K, H является подгруппой если и только если $HK = KH$.

AC11◦12. Пусть произведение любых двух левых смежных классов некоторой подгруппы H также является левым смежным классом подгруппы H . Верно ли, что H нормальна?

AC11◦13. Перечислите левые и правые смежные классы группы $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ по подгруппе верхнетреугольных матриц.

AC11◦14. Докажите, что: а) любая подгруппа, содержащая коммутант, нормальна б) коммутант нормальной подгруппы нормален.

AC11◦15. Докажите, что группа $\text{SL}_n(\mathbb{k})$, где \mathbb{k} — произвольное поле, порождается матрицами¹ $T_{ij}(\alpha) = E + \alpha E_{ij}$, $\alpha \in \mathbb{k}$, и вычислите (групповой) коммутатор $T_{ij}(\alpha)T_{k\ell}(\beta)T_{ij}^{-1}(\alpha)T_{k\ell}^{-1}(\beta)$ двух таких матриц, а также коммутатор трансвекции $T_{ij}(\alpha)$ с матрицей $D_{ij}(\gamma)$, которая получается из E заменой i -го и j -го диагональных элементов на γ и γ^{-1} , где $\gamma \in \mathbb{k}^\times$.

AC11◦16. Вычислите коммутант группы а) обратимых верхнетреугольных б) унитреугольных матриц над произвольным полем.

AC11◦17. Докажите, что коммутант $\text{GL}'_n(\mathbb{k}) = \text{SL}'_n(\mathbb{k}) = \text{SL}_n(\mathbb{k})$, за исключением групп $\text{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ и $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, и вычислите коммутанты последних двух групп.

AC11◦18. Убедитесь, что *кватернионные единицы* $Q_8 = \{\pm e, \pm i, \pm j, \pm k\}$ с таким умножением, что e является единицей, «минус на минус даёт плюс», $i^2 = j^2 = k^2 = -e$ и $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, образуют группу. Изоморфна ли она D_4 ?

AC11◦19. Найдите все пары изоморфных групп в наборах: а) $D_8, D_4 \times \mathbb{Z}/(2), Q_8 \times \mathbb{Z}/(2)$
б) $S_4, D_{12}, D_6 \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2), D_3 \times \mathbb{Z}/(4), Q_8 \times \mathbb{Z}/(3), D_4 \times \mathbb{Z}/(3)$.

AC11◦20. Найдите индекс подгруппы внутренних автоморфизмов в группе $\text{Aut } A_5$.

AC11◦21. Приведите пример таких двух не изоморфных групп G_1, G_2 и их нормальных подгрупп $H_1 \triangleleft G_1, H_2 \triangleleft G_2$, что $H_1 \simeq H_2$ и $G_1 / H_1 \simeq G_2 / H_2$.

¹Линейные операторы $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ с такими матрицами называются *трансвекциями*.