

## О строении групп

АС12♦1. Напишите два разных композиционных ряда для группы: а)  $S_4$  б)  $D_6$ .

АС12♦2. Разложите в полупрямое произведение собственных подгрупп группы

а)  $S_n$  б) обратимых верхнетреугольных матриц в) подобий евклидовой плоскости.

АС12♦3. Есть ли такое разложение у группы  $Q_8$ ?

АС12♦4. Приведите пример неабелевой группы порядка а) 21 б) 27 и укажите какой-нибудь её композиционный ряд.

АС12♦5. Покажите, что группа  $\mathbb{Z}/(3) \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}/(4)$ , где  $\psi: \mathbb{Z}/(4) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/(3))$  переводит  $[1]_4$  в автоморфизм смены знака, не абелева и не изоморфна ни  $D_6$ , ни  $A_4$ .

АС12♦6. Для всякого ли простого  $p \mid |G|$ , в  $G$  есть элемент порядка<sup>1</sup>  $p$ ?

АС12♦7. Верно ли, что силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$

а) нормальна если и только если  $N_p(G) = 1$

б) пересекает каждую подгруппу  $H \subset G$  по силовской  $p$ -подгруппе в  $H$

в) отображается в силовскую  $p$ -подгруппу при каждой факторизации  $G \twoheadrightarrow G/N$ ?

АС12♦8. Для простых  $p \in \mathbb{N}$  найдите  $N_p(S_p)$ .

АС12♦9. Перечислите все силовские подгруппы в а)  $S_3$  б)  $S_4$  в)  $S_7$ .

АС12♦10. Пусть  $|D_n| = 2^m k$ , где  $k$  нечётно. Докажите, что  $N_2(D_n) = k$ .

АС12♦11. Верно ли, что во всех группах порядка 12 есть нормальная подгруппа порядка 4?

АС12♦12. Перечислите с точностью до изоморфизма все группы порядка:

а) 15 б) 49 в) 21 г) 14 д) 45 е) 2121 ж\*) 12.

АС12♦13. Верно ли, что верхние унитреугольные матрицы составляют силовскую  $p$ -подгруппу в  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ? Сколько всего силовских  $p$ -подгрупп в  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ?

АС12♦14. Опишите подгруппу, порождённую матрицами  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  в  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ , и перечислите все силовские подгруппы в  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ .

АС12♦15. Рассмотрим подгруппу  $G \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , порождённую матрицами  $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ , где  $i^2 = \omega^2 + \omega = -1$ . Найдите  $|G|$ , разложите группу  $G$  в полупрямое произведение собственных подгрупп и задайте её образующими и соотношениями.

АС12♦16. Опишите группы автоморфизмов групп: а)  $\mathbb{Z}/(n)$  б)  $D_3$  в)  $D_4$  г)  $Q_8$  д)  $A_5$ . У каких из этих групп все автоморфизмы внутренние?

<sup>1</sup>  $\cdot_1 = {}^d g \cdots {}^1 g$  — элемент  $g$ , что  $g^d \in ({}^d g, \dots, {}^1 g)$  наборов

ПОДСКАЗКА: рассмотрите действие группы  $(d)/\mathbb{Z}$  циклическими перестановками элементов на множестве таких