Тензорная алгебра

Обозначения. Всюду в этом листке $e_1, \dots, e_d$ и $x_1, \dots, x_d$ по умолчанию означают двойственные базисы векторных пространств V и V^* над произвольным полем $\Bbbk$. Через $\mathrm{Sym}^n V$, $\mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ обозначаются подпространства симметричных и знакопеременных тензоров, а через $S^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{J}_{\mathrm{com}} \cap V^{\otimes n})$ и $\Lambda^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{J}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n})$ — обычные и грассмановы однородные многочлены степени n от $e_1, \dots, e_d$ (факторы пространства $V^{\otimes n}$ по соотношениям $\mathcal{J}_{\mathrm{com}}$ и $\mathcal{J}_{\mathrm{sk}}$ коммутирования и антикоммутирования).

AC14⋄1. Постройте изоморфизмы пространства n-линейных форм $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ с пространствами **а)** $V^{\otimes n*}$ **б)** $V^{*\otimes n}$. Который из них остаётся изоморфизмом в бесконечномерии?

AC14⋄2. Напишите матрицы Грама билинейных форм **а)** $(x_1 + x_2) \otimes (x_1 - x_2)$ **б)** $(x_1 + x_2)^{\otimes 2}$ **в)** $(x_1 + 2x_2) \otimes (x_1 + x_2) - (x_1 + x_2) \otimes (x_1 + 2x_2)$ **г)** $(x_1 + 2x_2) \otimes (x_3 + x_4) + (x_1 - 2x_2) \otimes (x_3 - x_4)$.

AC14⋄3. Пусть $d = \dim V = 3$, $\det : V \times V \times V \to \Bbbk$ — определитель матрицы координат тройки векторов в базисе e_1, e_2, e_3, а $\varphi = x_1 \otimes x_2 + x_3^{\otimes 2}$. Вычислите $\psi(e_1, e_2, e_3, e_3, e_3)$ для
а) $\psi = \varphi \otimes \det$ **б)** $\psi = \det \otimes \varphi$.

AC14⋄4. Разложимы ли тензоры **а)** $\sum_i e_i^{\otimes 2}$ **б)** $\sum_i e_i^{\otimes 3}$ **в)** $\sum_{ij} e_i^{\otimes 2} \otimes e_j$ **г)** $\sum_{ij} ij\, e_i \otimes e_j$
д) $\sum_{ij} (i + j)\, e_i \otimes e_j$ **е)** $\sum_{ijk} 2^{i+j+k^2} e_i \otimes e_j \otimes e_k$?

AC14⋄5. Для конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами **а)** симметричных n-линейных форм $\varphi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ **б)** функций $f : V \to \Bbbk$, задаваемых однородными многочленами степени n от $x_1, \dots, x_d$ **в)** $\mathrm{Sym}^n(V^*)$ **г)** $\mathrm{Sym}^n(V)^*$ **д)** $(S^n V)^*$ **е)** $S^n(V^*)$. В какие базисы пространств (а-д) они переводят базис пространства (е) из мономов $x_1^{m_1} \ldots x_d^{m_d}$?

AC14⋄6. В условиях зад. AC14⋄5 постройте канонические изоморфизмы между пространствами **а)** знакопеременных n-линейных форм $\varphi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ **б)** $\mathrm{Alt}^n(V^*)$ **в)** $\mathrm{Alt}^n(V)^*$ **г)** $(\Lambda^n V)^*$ **д)** $\Lambda^n(V^*)$. Куда переходит базис пространства (д) из мономов $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}$?

AC14⋄7. Какие из построенных в двух предыдущих задачах изоморфизмов остаются таковыми **а)** над полями конечной характеристики **б)** в бесконечномерии?

AC14⋄8. Пусть $\dim V = d$. Найдите $\dim \mathrm{Sym}^n V = \dim S^n V$ и $\dim \mathrm{Alt}^n V = \dim \Lambda^n V$.

AC14⋄9. Пусть $\mathrm{char}\, \Bbbk \neq 2$. Докажите, что **а)** $V \otimes V \simeq \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathrm{Alt}^2 V$ **б)** сумма $\mathrm{Sym}^n V \oplus \mathrm{Alt}^n V$ прямая при всех n. Верно ли это, когда $\mathrm{char}\, \Bbbk = 2$?

AC14⋄10. Предъявите $t \in V^{\otimes 3} \smallsetminus (\mathrm{Sym}^3 V \oplus \mathrm{Alt}^3 V)$.

AC14⋄11 (принцип Аронгольда). Покажите, что над полем характеристики нуль пространства $\mathrm{Sym}^n V^*$ и $S^n(V^*)$ линейно порождаются, соответственно, тензорами $\varphi^{\otimes n} = \varphi \otimes \ldots \otimes \varphi$ и многочленами φ^n, где $\varphi \in V^*$, и явно выразите через $\varphi^{\otimes n}$ тензоры
а) $x_{[2,1]} = x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_1 \otimes x_1$
б) $x_{[3,1]} = x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1$.

AC14⋄12. Вычислите
а) $\mathrm{sym}_{|n|+|k|}(x_{[n_1,\dots,n_d]} \otimes x_{[k_1,\dots,k_d]})$ **б)** $\mathrm{alt}_{n+k}\big(\mathrm{alt}_n(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}) \otimes \mathrm{alt}_k(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_k})\big)$.

AC14⋄13. Верно ли, что **а)** $S^2 S^2 V \simeq S^4 V$ **б)** $\mathrm{sym}_4(\mathrm{Sym}^2 V \otimes \mathrm{Sym}^2 V) = \mathrm{Sym}^4 V$ **в)** $\Lambda^2 \Lambda^2 V \simeq \Lambda^4 V$ **г)** $\mathrm{alt}_4(\mathrm{Alt}^2 V \otimes \mathrm{Alt}^2 V) = \mathrm{Alt}^4 V$?

AC14⋄14. Существует ли линейная обратимая замена координат, превращающая многочлен $9\,x^3 - 15\,yx^2 - 6\,zx^2 + 9\,xy^2 + 18\,z^2x - 2\,y^3 + 3\,zy^2 - 15\,z^2y + 7\,z^3$ в многочлен от $\leqslant 2$ переменных? Если да, предъявите такую замену явно.

AC14⋄15. Выясните, разложима ли в произведение трёх линейных форм от ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 грассманова кубическая форма $-\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 + 2\,\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 + 4\,\xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 + 3\,\xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4$, и если да, выпишите такое разложение явно.