§9. Комплексные и эрмитовы структуры на вещественном пространстве.

9.1. Комплексные структуры на $\mathbb{R}^{2n}$. Если $2n$-мерное векторное пространство $V = W_{\mathbb{R}}$ над полем $\mathbb{R}$ получилось в результате овеществления n-мерного комплексного векторного пространства W, то на пространстве V имеется вещественно линейный оператор умножения на i:

$$I : V \xrightarrow{v \mapsto iv} V ,$$

который удовлетворят условию $I^2 = -\mathrm{Id}_V$. Наоборот, если на произвольном вещественном векторном пространстве V задать вещественно линейный оператор I с $I^2 = -\mathrm{Id}_V$, то такой оператор позволяет определить операцию умножения векторов из V на комплексные числа по правилу

$$(x + iy) \cdot v \overset{\text{def}}{=} x \cdot v + y \cdot I(v) . \tag{9-1}$$

Поэтому всякий такой оператор I на вещественном векторном пространстве V называется *комплексной структурой* на V.

Упражнение 9.1. Проверьте непосредственным вычислением, что определённое формулой (9-1) умножение на комплексные числа наделяет V структурой векторного пространства над полем $\mathbb{C}$ (отсюда вытекает, в частности, что $\dim V$ автоматически чётна).

Увидеть это без вычислений можно следующим геометрическим способом. Поскольку оператор I аннулируется многочленом $t^2+1 = (t+i)(t-i)$, его собственные значения равны $\pm i$, и комплексифицированное пространство $V_{\mathbb{C}}$ распадается в прямую сумму двух собственных подпространств комплексифицированного оператора $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{I_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$:

$$V_{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_- , \quad \text{где}$$
$$W_+ = \ker(I_{\mathbb{C}} - i\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}) = \mathrm{im}\,(I_{\mathbb{C}} + i\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}) , \quad W_- = \ker(I_{\mathbb{C}} + i\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}) = \mathrm{im}\,(I_{\mathbb{C}} - i\,\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}) .$$

Как мы видели в n° 7.4, для каждого собственного вектора w оператора $I_{\mathbb{C}}$ сопряжённый вектор $\overline{w}$ также будет собственным для $I_{\mathbb{C}}$, причём с сопряжённым собственным значением. Это означает, что оператор комплексного сопряжения является обратным к самому себе (антилинейным) изоморфизмом между комплексными собственными подпространствами $W_{\pm}$

$$W_+ \xleftrightarrow[\sim]{w \leftrightarrow \overline{w}} W_- .$$

В частности, $V_{\mathbb{C}} = W_+ \oplus \overline{W}_+$ и $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2\dim_{\mathbb{C}} W_+$ чётна.

Заметим теперь, что для любого комплексного прямого разложения $V_{\mathbb{C}}$ в сумму двух комплексно сопряжённых комплексных подпространств[1]

$$V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U} \tag{9-2}$$

взятие вещественной части

$$\mathrm{Re} : U \xrightarrow{w \mapsto \mathrm{Re}\, w = (w+\overline{w})/2} V . \tag{9-3}$$

является вещественно линейным изоморфизмом, т. к. с точки зрения разложения (9-2) вещественные векторы $V = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid \overline{w} = w\}$ — это в точности все векторы вида $u + \overline{u}$. Перенося имеющееся в U умножение на i на пространство V посредством изоморфизма (9-3), мы получаем на V оператор $I = I_U$, который переводит вектор $v = \mathrm{Re}\,(u) \in V$ с $u \in U$ в вектор $\mathrm{Re}\,(iu) \in V$. По построению, $I^2 = -1$, подпространство U является $(+i)$-собственным для I, и умножение векторов из V на комплексные числа по правилу (9-1) задаёт на V структуру комплексного векторного пространства, $\mathbb{C}$-линейно изоморфного комплексному пространству U. Мы получаем

[1] наличие такого разложения равносильно условиям $\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim_{\mathbb{C}} U$ и $U \cap \overline{U} = 0$

9.1.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Следующие данные на $2n$-мерном вещественном векторном пространстве V взаимно однозначно соответствуют друг другу:*

(1) *структура векторного пространства над полем $\mathbb{C}$, для которой V является овеществлением;*

(2) *вещественно линейный оператор $V \xrightarrow{I} V$ с $I^2 = -E$;*

(3) *комплексное n-мерное подпространство $U \subset V_{\mathbb{C}}$, такое что $U \cap \overline{U} = 0$ (или, что равносильно, $V = U \oplus \overline{U}$).*

Соответствие (1) $\Rightarrow$ (2) сопоставляет комплексной структуре оператор умножения на i. Соответствие (2) $\Rightarrow$ (3) сопоставляет I собственное $(+i)$-подпространство U комплексифицированного оператора $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{I_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$. Соответствие (3) $\Rightarrow$ (1) наделяет V комплексной структурой, индуцированной с комплексной структуры на пространстве U посредством вещественно линейного изоморфизма $\mathrm{Re} : U \xrightarrow{\sim} V$, переводящего $w \in U$ в $\mathrm{Re}\,(w) = (w + \overline{w})/2 \in V$ (при этом изоморфизм (9-3) отождествляет оператор умножения на i в U с оператором I на V из данных (2)). $\square$

Упражнение 9.2. Убедитесь, что вещественно линейный оператор $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ является одновременно комплексно линейным оператором на V_I тогда и только тогда, когда $FI = IF$.

9.2. Келеровы тройки (I, g, ω). Эрмитова структура $(*,*)$ на n-мерном комплексном векторном пространстве W индуцирует на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$ сразу три структуры:

- евклидову структуру $g(v,w) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Re}\,(v,w)$;
- симплектическую структуру $\omega(v,w) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}\,(v,w)$;
- комплексную структуру $I : w \longmapsto iw$.

В самом деле, разделяя вещественную и мнимую части эрмитова формы

$$(v,w) = g(v,w) + i\omega(v,w) \; ,$$

мы вследствие эрмитовой симметричности $(v,w) = \overline{(w,v)}$ получаем для вещественно значных билинейных форм g и ω соотношения $g(v,w) = g(w,v)$ и $\omega(v,w) = -\omega(w,v)$, причём

$$g(v,v) = (v,v) > 0 \quad \forall\, v \neq 0 \; ,$$

т. е. симметрическая форма g положительно определена. Более того, полуторалинейность $(*,*)$ ведёт к соотношениям

$$\begin{aligned}
(iv, iw) = (v,w) \qquad &\Rightarrow \qquad g(I(v), I(w)) = g(v,w) \quad \& \quad \omega(I(v), I(w)) = \omega(v,w) \; , \\
(v, iw) = -i(v,w) \qquad &\Rightarrow \qquad g(v, I(w)) = \omega(v,w) \quad \& \quad \omega(v, I(w)) = -g(v,w) \; ,
\end{aligned}$$

из которых следует, что форма ω невырождена, а оператор I является ортогональным для g и симплектическим для ω , т. е. $I \in \mathrm{O}_g(W_{\mathbb{R}}) \cap \mathrm{Sp}_\omega(W_{\mathbb{R}})$.

Упражнение 9.3. Покажите, что каждый элемент тройки (I, g, ω) однозначно восстанавливается по двум другим.

Если зафиксировать какой-либо базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ эрмитова пространства W над полем $\mathbb{C}$, в котором матрица Грама эрмитова произведения имеет вид $G + i\Omega$ с вещественными $G^t = G$ и $\Omega^t = -\Omega$, то в ассоциированном с ним базисе $e_1, e_2, \dots, e_n, ie_1, ie_2, \dots, ie_n$ овеществлённого пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$ матрицы Грама форм g, ω и матрица оператора I будут иметь блочный вид

$$g = \begin{pmatrix} G & \Omega \\ -\Omega & G \end{pmatrix} \; , \qquad \omega = \begin{pmatrix} \Omega & -G \\ G & \Omega \end{pmatrix} \; , \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \; .$$

В частности, в ортонормальном базисе $g = E$, а $\omega = I = -J$.

Набор данных (I, g, ω) на произвольном $2n$-мерном вещественном пространстве V, состоящий из комплексной структуры I, евклидовой структуры g и невырожденной кососимметричной формы ω, называется *келеровой тройкой*, если комплекснозначная форма $(v, w) = g(v, w) + i\omega(v, w)$ задаёт эрмитову структуру на n-мерном комплексном векторном пространстве V_I, построенном по оператору I как в n° 9.1.

Мы видели, для этого *необходимо* выполнение условий

$$I^2 = -1\ , \quad g(I(v), I(w)) = g(v, w)\ , \quad \omega(I(v), I(w)) = \omega(v, w)$$
$$g(v, I(w)) = \omega(v, w)\ , \quad \omega(v, I(w)) = -g(v, w)\ .$$

9.3. Продолжение евклидовой структуры до келеровой тройки. Для любой евклидовой структуры g на (чётномерном) вещественном пространстве V и любого оператора $I \in \mathrm{O}_g(V)$ с $I^2 = -1$ форма $g(v, Iw)$ автоматически невырождена и кососимметрична:

$$g(v, Iw) = g(Iv, I^2w) = -g(Iv, w) = -g(w, Iv)\ .$$

Поэтому комплекснозначная форма $(v, w) = g(v, w) - ig(v, Iw)$ автоматически эрмитово симметрична и положительно определена, а также полуторалинейна по отношению к комплексной структуре I:

$$(Iv, w) = g(Iv, w) + ig(v, w) = i\,(g(v, w) - ig(Iv, w)) = i\,(g(v, w) + ig(v, Iw)) = i(v, w)$$
$$(v, Iw) = g(v, Iw) - ig(v, w) = -i\,(g(v, w) + ig(v, Iw)) = -i(v, w)\ .$$

Таким образом, (I, g, ω) с $\omega = g(v, I(w))$ является келеровой тройкой.

В терминах данных (3) из предложения n° 9.1.1 условие $I \in \mathrm{O}_g(V)$ означает, что $(+i)$-собственное подпространство $U \subset V_{\mathbb{C}}$ комплексифицированного оператора $I_{\mathbb{C}}$ является максимальным изотропным подпространством $\mathbb{C}$-билинейной квадратичной формы $g_{\mathbb{C}}$.

В самом деле, если $I \in \mathrm{O}_g(V)$, то $I_{\mathbb{C}} \in \mathrm{O}_{g_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}})$, и для любого u, такого что $I_{\mathbb{C}}u = iu$, мы имеем $g_{\mathbb{C}}(u, u) = g_{\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}u, I_{\mathbb{C}}u) = g_{\mathbb{C}}(iu, iu) = -g_{\mathbb{C}}(u, u)$, откуда $g_{\mathbb{C}}(u, u) = 0$. Наоборот, для любого $g_{\mathbb{C}}$-изотропного подпространства U размерности $\dim_{\mathbb{C}} U = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V$ пересечение $U \cap \overline{U} = 0$, поскольку у квадрики g нет вещественных изотропных векторов[2], а значит, мы имеем прямое разложение $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$. Более того, подпространство $\overline{U}$ также изотропно для $g_{\mathbb{C}}$, поскольку $\forall\ (v_1 + iv_2) \in U$ с $v_1, v_2 \in V$ мы имеем

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}(\overline{v_1 + iv_2}, \overline{v_1 + iv_2}) &= g(v_1, v_1) - g(v_2, v_2) - 2i\,g(v_1, v_2) = \\ &= \overline{g(v_1, v_1) - g(v_2, v_2) + 2i\,g(v_1, v_2)} = \overline{g_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2, v_1 + iv_2)} = 0\ . \end{aligned}$$

Это означает, что оператор $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{I_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$, определённый так, чтобы U и $\overline{U}$ были его собственными $\pm i$ подпространствами, является изометрией формы $g_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}(u_1 + \overline{u}_2, u_1 + \overline{u}_2) &= g_{\mathbb{C}}(u_1, \overline{u}_2) + g_{\mathbb{C}}(\overline{u}_1, u_2) = \\ &= g_{\mathbb{C}}(iu_1, -i\overline{u}_2) + g_{\mathbb{C}}(-i\overline{u}_1, iu_2) = g_{\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}(u_1 + \overline{u}_2), I_{\mathbb{C}}(u_1 + \overline{u}_2))\ . \end{aligned}$$

Мы получаем

9.3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Следующие данные на $2n$-мерном вещественном пространстве V с евклидовой структурой g эквивалентны:*

(1) *келерова тройка (I, g, ω), в которой $\omega(v, w) = g(v, I(w))$;*

(2) *комплексная структура $I \in \mathrm{O}_g(V)$ на V;*

[2] если $u_1 = \overline{u}_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in U$, то $u_1 + u_2 \in U$ изотропен и вещественен, откуда $u_2 = -u_1 = iv$ для некоторого $v \in V$, и $0 = g_{\mathbb{C}}(u_1, u_1) = -g(v, v) \Rightarrow v = 0$

(3) *максимальное (т. е. n-мерное) комплексное изотропное подпространство $U \subset V_{\mathbb{C}}$ для $\mathbb{C}$-билинейного продолжения $g_{\mathbb{C}}$ формы g на $V_{\mathbb{C}}$.*

Связи между этими данными те же, что и в предложении n° 9.1.1. □

9.4. Продолжение симплектической структуры до келеровой тройки. Совершенно аналогично предыдущему, невырожденная кососимметричная форма ω на (чётномерном) вещественном пространстве V и любой оператор $I \in \mathrm{Sp}_{\omega}(V)$ с $I^2 = -1$ производят невырожденную симметричную[3] форму $-\omega(v, Iw)$. Таким образом, комплекснозначная форма

$$(v, w) = -\omega(v, Iw) + i\omega(v, w) \tag{9-4}$$

автоматически невырождена и эрмитово симметрична, а также полуторалинейна:

$$(Iv, w) = -\omega(v, w) + i\omega(Iv, w) = i\,(\omega(Iv, w) + i\omega(v, w)) = i\,(-\omega(v, Iw) + i\omega(v, w)) = i(v, w)$$
$$(v, Iw) = \omega(v, w) + i\omega(v, Iw) = -i\,(-\omega(v, Iw) + i\omega(v, w)) = -i(v, w)\ .$$

Следовательно, (I, g, ω) с $g = -\omega(v, I(w))$ является келеровой тройкой тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-\omega(v, Iv)$ положительно определена на V.

Чтобы прояснить последнее условие геометрически, рассмотрим комплексификацию

$$V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{I_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$$

и обозначим через $\omega_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)$ и $\omega_{\mathrm{he}}(w_1, w_2) = \omega_{\mathbb{C}}(w_1, \overline{w}_2)$ комплексно билинейное и полуторалинейное продолжения кососимметричной формы ω на $V_{\mathbb{C}}$. Тогда $V_{\mathbb{C}} = L \oplus \overline{L}$, где $L, \overline{L} \subset V_{\mathbb{C}}$ суть собственные $\pm i$-подпространства комплексифицированного оператора $I_{\mathbb{C}}$.

Из условия $I_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Sp}_{\omega_{\mathbb{C}}}(V_{\mathbb{C}})$, как и в евклидовом случае, вытекает, что L изотропно для $\omega_{\mathbb{C}}$: для любых $w_1, w_2 \in L$ мы имеем $\omega_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = \omega_{\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}w_1, I_{\mathbb{C}}w_2) = \omega_{\mathbb{C}}(iw_1, iw_2) = -\omega_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)$, откуда $\omega_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = 0$. Поскольку $\forall\, u, v \in V$, таких что $(u + iv) \in L$, выполняется равенство $Iu = -v$, ограничение полуторалинейной формы $i\,\omega_{\mathrm{he}}$ на L имеет вид[4]

$$\begin{aligned} i\,\omega_{\mathrm{he}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) &= \omega(u_1, v_2) - \omega(v_1, u_2) + i\,\big(\omega(u_1, u_2) + \omega(v_1, v_2)\big) = \\ &= -\omega(u_1, Iu_2) + \omega(Iu_1, u_2) + i\,\big(\omega(u_1, u_2) + \omega(Iu_1, Iu_2)\big) = 2\,\big(-\omega(u_1, Iu_2) + i\,\omega(u_1, u_2)\big)\,. \end{aligned}$$

Полагая $w_\nu = u_\nu + iv_\nu \in L$ и $g(u_1, u_2) = -\omega(u_1, Iu_2)$, это равенство можно переписать в виде

$$i\,\omega_{\mathrm{he}}(w_1, w_2) = 2\,\Big(g\big(\mathrm{Re}\,(w_1), \mathrm{Re}\,(w_2)\big) + i\,\omega\big(\mathrm{Re}\,(w_1), \mathrm{Re}\,(w_2)\big)\Big) = 2\,\big(\mathrm{Re}\,(w_1), \mathrm{Re}\,(w_2)\big)\ , \tag{9-5}$$

где справа стоит форма (9-4). Итак, положительность формы (9-4) на V равносильна положительности ограничения $i\,\omega_{\mathrm{he}}|_L$.

Наоборот, для любого n-мерного подпространства $L \subset V_{\mathbb{C}}$, такого что $\omega_{\mathbb{C}}(L, L) \equiv 0$, а $i\,\omega_{\mathbb{C}}(L, \overline{L}) > 0$, мы имеем[5] $L \cap \overline{L} = 0$, а значит $V = L \oplus \overline{L}$, причём $\overline{L}$ тоже лагранжево для $\omega_{\mathbb{C}}$, т. к. для любых $w_\nu = u_\nu + iv_\nu \in L$ с $u_\nu, v_\nu \in V$

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{C}}(\overline{w}_1, \overline{w}_2) &= \omega_{\mathbb{C}}(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = \omega(u_1, u_2) - \omega(v_1, v_2) - i\,\omega(u_1, v_2) - i\,\omega(v_1, u_2) = \\ &= \overline{\omega(u_1, u_2) - \omega(v_1, v_2) + i\,\omega(u_1, v_2) + i\,\omega(v_1, u_2)} = \overline{\omega_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2)} = \overline{\omega_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)} = 0\,. \end{aligned}$$

Это означает, что оператор $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{I_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$, для которого U и $\overline{U}$ служат собственными $\pm i$ подпространствами, является изометрией формы $\omega_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{C}}(u_1 + \overline{v}_1, u_2 + \overline{v}_2) &= \omega_{\mathbb{C}}(u_1, \overline{v}_2) + \omega_{\mathbb{C}}(\overline{v}_1, u_2) = \\ &= \omega_{\mathbb{C}}(iu_1, -i\overline{v}_2) + \omega_{\mathbb{C}}(-i\overline{v}_1, iu_2) = \omega_{\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}(u_1 + \overline{v}_1), I_{\mathbb{C}}(u_2 + \overline{v}_2))\,. \end{aligned}$$

[3] симметричность проверяется выкладкой $\omega(v, Iw) = \omega(Iv, I^2w) = -\omega(Iv, w) = \omega(w, Iv)$

[4] в нижней строке мы пользуемся условиями $I \in \mathrm{Sp}_{\omega}(V)$ и $I^2 = -1$

[5] если бы $u_1 = \overline{u}_2$ с $u_1, u_2 \in L$, то $0 = i\,\omega_{\mathbb{C}}(u_2, u_1) = i\,\omega_{\mathbb{C}}(u_2, \overline{u}_2) = \omega_{\mathrm{he}}(u_2, u_2) > 0$ (противоречие)

а индуцированная на V полуторалинейная форма $(*, *)$ из правой части (9-5) будет эрмитовой структурой. Мы получаем

9.4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Следующие данные на $2n$-мерном вещественном пространстве V с невырожденной кососимметричной билинейной формой ω эквивалентны:*

(1) *келерова тройка (I, g, ω), в которой $g(v, w) = -\omega(v, Iw)$;*

(1) *комплексная структура $I \in \mathrm{Sp}_\omega(V)$, такая что квадратичная форма $-\omega(v, Iw)$ на V положительно определена;*

(2) *n-мерное комплексное лагранжево подпространство $L \subset V_\mathbb{C}$ билинейной формы $\omega_\mathbb{C}$, такое что полуторалинейная форма $i\,\omega_{\mathrm{he}}$ задаёт на L эрмитову структуру.*

Связи между этими данными те же, что и в предложении n° 9.1.1. □

9.4.2. Зигелево полупространство $\mathfrak{H}_n \subset \mathbf{Mat}_n(\mathbb{C})$. Зафиксируем симплектический базис

$$e_1', e_2', \dots, e_n', e_1'', e_2'', \dots, e_n'' \tag{9-6}$$

невырожденной кососимметричной формы ω на $V \simeq \mathbb{R}^{2n}$, в котором

$$\omega = J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{9-7}$$

и обозначим через $V', V'' \subset V$ лагранжевы подпространства, натянутые на первые n и на последние n базисных векторов соответственно. Тогда $V = V' \oplus V''$ и $V_\mathbb{C} = V_\mathbb{C}' \oplus V_\mathbb{C}''$, причём подпространства $V_\mathbb{C}'$, $V_\mathbb{C}''$ будут лагранжевыми для $\omega_\mathbb{C}$.

Заметим, что для любого разложения $V_\mathbb{C} = L \oplus \overline{L}$ в прямую сумму сопряжённых лагранжевых подпространств формы $\omega_\mathbb{C}$, таких что полуторалинейная форма $i\,\omega_{\mathrm{he}}$ положительно определена на L, пространство L имеет нулевое пересечение $L \cap U_\mathbb{C} = 0$ с любым лагранжевым подпространством $U_\mathbb{C} \subset V_\mathbb{C}$, получающимся комплексификацией вещественного лагранжева подпространства $U \subset V$, поскольку $i\,\omega_{\mathrm{he}}(u_1 + iu_2, u_1 + iu_2) = 0$ для $u_1, u_2 \in U$.

В частности, $L \cap V_\mathbb{C}'' = 0$ и проекция L на $V_\mathbb{C}'$ вдоль $V_\mathbb{C}''$ является изоморфизмом n-мерных комплексных пространств. Следовательно, существует единственный базис

$$w_1, w_2, \dots, w_n \subset L \subset V_\mathbb{C}$$

пространства L над $\mathbb{C}$, состоящий из прообразов первых n базисных векторов e' из (9-6) относительно этой проекции. Комплексная $n \times 2n$ - матрица, образованная столбцами координат векторов w_ν в базисе (9-6) пространства $V_\mathbb{C}$ над $\mathbb{C}$, имеет блочный вид

$$(w_1, w_2, \dots, w_n) = (e_1', \dots, e_n', e_1'', \dots, e_n'') \cdot \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}). \tag{9-8}$$

Из (9-7) вытекает, что матрицы Грама форм $\omega_\mathbb{C}$ и $i\,\omega_{\mathrm{he}}$ в базисе $w = e' + e''S$ имеют вид

$$\omega_\mathbb{C}|_L = \begin{pmatrix} E & S^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix} = S^t + S,$$

$$i\omega_{\mathrm{he}}|_L = i \cdot \begin{pmatrix} E & S^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \overline{S} \end{pmatrix} = i\,(S^t + \overline{S}).$$

Лагранжевость L равносильна симметричности матрицы S. В этом случае $i\,(S^t + \overline{S}) = \mathrm{Im}\,(S)$, и положительность ограничения $i\omega_{\mathrm{he}}|_L$ означает, что вещественная симметрическая матрица $\mathrm{Im}\,(S)$ положительно определена. Множество комплексных $n \times n$ матриц $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ удовлетворяющих условиям

$$S = S^t, \quad \mathrm{Im}\,S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \text{ положительно определена}, \tag{9-9}$$

обозначается $\mathfrak{H}_n$ и называется *верхним полупространством Зигеля*[6], а сами условия (9-9) называются *соотношениями Римана*[7].

9.4.3. СЛЕДСТВИЕ. *Комплексные структуры, продолжающие стандартную кососимметрическую форму на симплектическом пространстве Ω_{2n} до келеровой тройки, взаимно однозначно соответствуют точкам зигелева полупространства $\mathfrak{H}_n$. При этом комплексная структура $\Omega_{2n} \xrightarrow{I_S} \Omega_{2n}$, отвечающая матрице $S = X + iY \in \mathfrak{H}_n$ (с $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$) имеет в симплектическом базисе* (9-6) *блочную матрицу*

$$I_S = \begin{pmatrix} -Y^{-1}X & Y^{-1} \\ -Y - XY^{-1}X & XY^{-1} \end{pmatrix} \tag{9-10}$$

Доказательство. Нам осталось проверить только правило (9-10). Согласно предложению n° 9.1.1, комплексная структура $V \xrightarrow{I} V$, отвечающая разложению $V_{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$, переводит вектор $v = \mathrm{Re}\, w \in V$ с $w \in W$ в $I(v) = \mathrm{Re}\,(iw)$. Для $w = e' + e'' \cdot (X + iY)$ мы имеем $\mathrm{Re}\,(w) = e' + e'' \cdot X$ и $\mathrm{Re}\,(iw) = -e'' \cdot Y$, откуда $I(e'') = I\big(\mathrm{Re}\,(-iw \cdot Y^{-1})\big) = \mathrm{Re}\,(w) \cdot Y^{-1} = e' \cdot Y^{-1} + e'' \cdot XY^{-1}$ и $I(e') = I(\mathrm{Re}\,(w) - e'' \cdot X) = \mathrm{Re}\,(iw) - I(e'') \cdot X = -e' \cdot Y^{-1}X + e'' \cdot (-Y + XY^{-1}X)$. □

Упражнение 9.4. Проверьте прямым вычислением, что матрица I_S из (9-10) имеет $I_S^2 = -E$ и сохраняет форму ω.

Упражнение 9.5. Постройте изоморфизм $U_n \simeq \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Упражнение 9.6. Покажите, что топологическое подпространство $\mathfrak{H}_n \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ непрерывно стягивается по себе в точку.

---

[6] по аналогии со случаем $n = 1$, когда условия (9-9) задают верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$ в $\mathbb{C} = \mathrm{Mat}_1(\mathbb{C})$

[7] соотношения Римана возникают в самых разных разделах геометрии; например, они необходимы и достаточны для того, чтобы n-мерный комплексный тор $\mathbb{C}^n/\Lambda$, где $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ — целочисленная решётка, натянутая на n стандартных базисных векторов $\mathbb{C}^n$ и n столбцов матрицы S, можно было комплексно аналитически вложить в комплексное проективное пространство как алгебраическое подмногообразие (подробности см. в книгах *Д. Мамфорд. Лекции о тэта-функциях.* (М., «Мир», 1988) и *В. В. Шокуров. Римановы поверхности и алгебраические кривые.* (М., «ВИНИТИ», 1988, сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.», т. 23 «Алгебраическая Геометрия 1»)