

## Письменный экзамен за третий семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

- Задача 1 (10 баллов).** Для диагонализуемого линейного оператора  $g : V \rightarrow V$  на конечномерном пространстве над произвольным полем характеристики нуль выразите  $\text{tr } S^4 g$  через  $\text{tr } g$ ,  $\text{tr } g^2$ ,  $\text{tr } g^3$  и  $\text{tr } g^4$ .
- Задача 2 (10 баллов).** Всякая ли конечномерная ассоциативная алгебра с единицей и без делителей нуля является алгеброй с делением<sup>1</sup>?
- Задача 3 (10 баллов).** Пусть  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  — инъективное представление конечной группы  $G$  над полем  $\mathbb{C}$ , и пусть  $\dim V \geq 2$ . Может ли характер  $\chi_\rho$  принимать значение  $\dim V$  более, чем на одном классе сопряжённости?
- Задача 4 (10 баллов).** Линейный оператор  $s$  из пространства комплекснозначных функций на гранях икосаэдра в пространство комплекснозначных функций на его вершинах сопоставляет функции  $f$  функцию  $sf$ , значение которой в вершине  $v$  равно сумме значений  $f$  на пяти примыкающих к этой вершине гранях. Найдите размерности ядра и образа оператора  $s$  и явно укажите в них какие-нибудь базисы.
- Задача 5 (10 баллов).** Изоморфны ли кольца комплексных представлений<sup>2</sup> группы кватернионных единиц  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$  и группы квадрата  $D_4$ ?
- Задача 6 (10 баллов).** Разложите на неприводимые представление симметрической группы  $S_5$ , индуцированное трёхмерным представлением знакопеременной подгруппы  $A_5 \subset S_5$  вращениями додекаэдра<sup>3</sup>.
- Задача 7 (10 баллов).** Обозначим через  $V_n = S^n(\mathbb{C}^2)$  стандартный  $(n + 1)$ -мерный неприводимый  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -модуль. Верно ли, что  $S^m V_n \simeq S^n V_m$  для всех  $m, n \in \mathbb{N}$ ?
- Задача 8 (10 баллов).** Покажите, что любой правый сопряжённый функтор перестановочен с пределами.

<sup>1</sup>т. е. каждый ненулевой элемент  $a$  обладает двусторонним обратным  $a^{-1}$ :  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

<sup>2</sup>т. е. целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров, рассматриваемые как подкольца в кольцах комплексных функций на группе

<sup>3</sup>напомню, что собственная группа додекаэдра отождествляется с группой чётных перестановок пяти кубов, образованных диагоналями граней додекаэдра