Письменный экзамен за третий семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Для диагонализуемого линейного оператора $g : V \to V$ на конечномерном пространстве над произвольным полем характеристики нуль выразите $\operatorname{tr} S^4 g$ через $\operatorname{tr} g$, $\operatorname{tr} g^2$, $\operatorname{tr} g^3$ и $\operatorname{tr} g^4$.

Задача 2 (10 баллов). Всякая ли конечномерная ассоциативная алгебра с единицей и без делителей нуля является алгеброй с делением[1]?

Задача 3 (10 баллов). Пусть $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — инъективное представление конечной группы G над полем $\mathbb{C}$, и пусть $\dim V \geqslant 2$. Может ли характер χ_ϱ принимать значение $\dim V$ более, чем на одном классе сопряжённости?

Задача 4 (10 баллов). Линейный оператор s из пространства комплекснозначных функций на гранях икосаэдра в пространство комплекснозначных функций на его вершинах сопоставляет функции f функцию sf, значение которой в вершине v равно сумме значений f на пяти примыкающих к этой вершине гранях. Найдите размерности ядра и образа оператора s и явно укажите в них какие-нибудь базисы.

Задача 5 (10 баллов). Изоморфны ли кольца комплексных представлений[2] группы кватернионных единиц $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$ и группы квадрата D_4?

Задача 6 (10 баллов). Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_5, индуцированное трёхмерным представлением знакопеременной подгруппы $A_5 \subset S_5$ вращениями додекаэдра[3].

Задача 7 (10 баллов). Обозначим через $V_n = S^n(\mathbb{C}^2)$ стандартный $(n+1)$-мерный неприводимый $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуль. Верно ли, что $S^m V_n \simeq S^n V_m$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$?

Задача 8 (10 баллов). Покажите, что любой правый сопряжённый функтор перестановочен с пределами.

[1] т. е. каждый ненулевой элемент a обладает двусторонним обратным a^{-1}: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

[2] т. е. целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров, рассматриваемые как подкольца в кольцах комплексных функций на группе

[3] напомню, что собственная группа додекаэдра отождествляется с группой чётных перестановок пяти кубов, образованных диагоналями граней додекаэдра