Письменный экзамен за третий семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Для диагонализуемого линейного оператора $g : V \to V$ на конечномерном пространстве над произвольным полем характеристики нуль выразите $\operatorname{tr} \Lambda^4 g$ через $\operatorname{tr} g$, $\operatorname{tr} g^2$, $\operatorname{tr} g^3$ и $\operatorname{tr} g^4$.

Задача 2 (10 баллов). Ассоциативная алгебра называется *полупростой*, если она является полупростым левым модулем над собою. Покажите, что конечномерная как векторное пространство коммутативная алгебра полупроста тогда и только тогда, когда в ней нет нильпотентных элементов.

Задача 3 (10 баллов). Пусть значение характера комплексного неприводимого представления V конечной группы на её классе сопряжённости K отлично от нуля, а $\dim V$ взаимно проста с $|K|$. Покажите, что все элементы из K действуют на V гомотетиями.

Задача 4 (10 баллов). Линейный оператор s из пространства комплекснозначных функций на рёбрах куба в пространство комплекснозначных функций на его гранях сопоставляет функции f функцию sf, значение которой на грани равно сумме значений f на ограничивающих эту грань рёбрах. Найдите размерности ядра и образа оператора s и явно укажите в них какие-нибудь базисы.

Задача 5 (10 баллов). Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_5, индуцированное одномерным представлением цикла длины 5, в котором он действует умножением на $e^{2\pi i/5}$.

Задача 6 (10 баллов). Обозначим через $R(G)$ кольцо комплексных представлений[1] конечной группы G. Покажите, что $R(G_1 \times G_2) = R(G_1) \otimes R(G_2)$ как абелева группа.

Задача 7 (10 баллов). Обозначим через $V_n = S^n(\mathbb{C}^2)$ стандартный $(n+1)$-мерный неприводимый $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуль. Разложите $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-модуль $S^3 V_3$ на неприводимые.

Задача 8 (10 баллов). Два контравариантных функтора $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ называются *левосопряжёнными*, если имеется функториальная по $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ биекция $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(D), C\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(C), D\big)$. Верно ли, что левосопряжённые функторы переводят пределы в копределы?

[1] т. е. целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров, рассматриваемые как подкольца в кольцах комплексных функций на группе