Письменный экзамен за четвёртый семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Модуль над коммутативным кольцом называется *нётеровым*, если любой его подмодуль конечно порождён. Верно ли, что всякий сюрьективный эндоморфизм нётерова модуля является изоморфизмом?

Задача 2 (10 баллов). Опишите кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{1}] = \mathbb{Q}[x]/(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Задача 3 (10 баллов). Покажите, что множество прямых, лежащих на гладкой квадрике в $\mathbb{P}_4$, является проективным алгебраическим многообразием, выясните, приводимо ли оно, и найдите его размерность. (Основное поле алгебраически замкнуто характеристики нуль).

Задача 4 (10 баллов). Пусть 6 точек $p_1, p_2, \dots, p_6 \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ не лежат на одной конике и никакие три из них не коллинеарны. Обозначим через $W = \{f \in S^3V^* \mid \forall i \ f(p_i) = 0\}$ пространство кубических форм, зануляющихся во всех шести точках $p_1, p_2, \dots, p_6$. Отображение

$$\psi : \mathbb{P}_2 \smallsetminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \to \mathbb{P}(W^*)$$

переводит точку $p \neq p_1, p_2, \dots, p_6$ в подпространство $\operatorname{Ann} p = \{f \in W \mid f(p) = 0\}$. Покажите, что $\operatorname{Ann} p$ имеет коразмерность 1 в W, и найдите $\dim W$ и степень[1] замыкания образа отображения ψ. (Основное поле алгебраически замкнуто характеристики нуль).

Задача 5 (10 баллов). Опишите все подполя в поле $\mathbb{Q}[\omega, \sqrt[3]{5}]$, где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, выясните, какие из них являются расширениями Галуа поля $\mathbb{Q}$, и укажите все пары изоморфных друг другу подполей.

Задача 6 (10 баллов). Может ли конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ содержать бесконечно много корней из единицы?

Задача 7 (10 баллов). Найдите группу Галуа многочлена $x^4 + x^2 + x + 1$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 8 (10 баллов). Зафиксируем какое-нибудь алгебраическое замыкание $\mathbb{F}$ поля $\mathbb{Q}$ и обозначим через $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ наибольшее подполе, не содержащее $\sqrt[3]{5}$. Бывают ли у поля $\Bbbk$ конечные расширения с нециклической группой Галуа?

---

[1] степенью d-мерного неприводимого проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}_n$ называется число точек пересечения X с проективными подпространствами $L \subset \mathbb{P}_n$ размерности $n-d$, пробегающими какое-нибудь непустое открытое подмножество грассманиана $(n-d)$-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$, на котором это число постоянно