Письменный экзамен за четвёртый семестр (вторая попытка)

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 60 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Для модуля M над произвольным коммутативным кольцом K с единицей положим

$$\operatorname{Ann}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K \mid xM = 0\}.$$

Верно ли, что если K-модуль M нётеров[1], то фактор кольцо $K/\operatorname{Ann}(M)$ тоже нётерово?

Задача 2 (10 баллов). Опишите кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}[\sqrt[5]{1}] = \mathbb{Q}[x]/(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Задача 3 (10 баллов). Над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль покажите, что множество лежащих на гладкой квадрике в $\mathbb{P}_5$ прямых является дизъюнктным объединением двух неприводимых проективных алгебраических многообразий и найдите размерности этих многообразий.

Задача 4 (10 баллов). Над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль обозначим через L проективное пространство всех коник на $\mathbb{P}_2$, проходящих через две фиксированные различные точки $a, b \in \mathbb{P}_2$, а через $S \subset L^\times$ — замыкание образа отображения

$$\psi : \mathbb{P}_2 \smallsetminus \{a, b\} \to L^\times,$$

переводящего отличную от a и b точку $p \in \mathbb{P}_2$ в образованную всеми проходящими через p кониками из L гиперплоскость в L.

а) Убедитесь, что это и в самом деле гиперплоскость и найдите размерности $\dim L$, $\dim S$ и степень[2] $\deg S$.

б) Опишите пучки коник, отвечающие всем лежащим на S прямым.

Задача 5 (10 баллов). Опишите все подполя в поле $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}]$, выясните, какие из них являются расширениями Галуа поля $\mathbb{Q}$, и укажите все пары изоморфных друг другу подполей.

Задача 6 (10 баллов). При каких n примитивный корень $\sqrt[n]{1} \in \mathbb{C}$ имеет степень 2 над $\mathbb{Q}$?

Задача 7 (10 баллов). Найдите группу Галуа многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ над $\mathbb{Q}$.

[1] модуль над коммутативным кольцом называется *нётеровым*, если любой его подмодуль конечно порождён

[2] степенью d-мерного неприводимого проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}_n$ называется число точек пересечения X с проективными подпространствами $L \subset \mathbb{P}_n$ размерности $n - d$, пробегающими какое-нибудь непустое открытое подмножество грассманиана $(n - d)$-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$, на котором это число постоянно