

## §1. Тензорные произведения

**1.1. Полилинейные отображения.** Рассмотрим модули  $V_1, V_2, \dots, V_n$  и  $W$  над произвольным коммутативным кольцом  $K$ . Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W \quad (1-1)$$

называется *полилинейным*<sup>1</sup>, если оно линейно отдельно по каждому из своих аргументов при произвольным образом зафиксированных остальных:

$$\varphi(\dots, \lambda v' + \mu v'', \dots) = \lambda \varphi(\dots, v', \dots) + \mu \varphi(\dots, v'', \dots).$$

Например, 1-линейные отображения  $V \rightarrow W$  это линейные операторы, а 2-линейные отображения  $V \times V \rightarrow K$  это билинейные формы на модуле  $V$ .

Полилинейные отображения (1-1) можно обычным образом складывать и умножать на числа из  $K$ , так что они тоже образуют  $K$ -модуль. Он называется *модулем полилинейных отображений* и обозначается через  $\text{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$  или, когда важно явно указать кольцо, — через  $\text{Hom}_K(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ .

**ПРИМЕР 1.1 (ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ)**

Если  $K = \mathbb{k}$  — поле, а  $V_1, V_2, \dots, V_n$  и  $W$  — векторные пространства размерностей  $d_1, d_2, \dots, d_n$  и  $d$ , то  $\dim \text{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n \cdot d$ . Чтобы убедиться в этом, зафиксируем в каждом пространстве  $V_i$  некоторый базис  $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$ , а также базис  $e_1, e_2, \dots, e_d$  в  $W$ . Отображение (1-1) однозначно определяется своими значениями

$$\varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}) \in W \quad (1-2)$$

на всевозможных сочетаниях базисных векторов из пространств  $V_i$ , т. к. для произвольного набора векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , раскладывающихся по базисам как

$$v_i = \sum_{\alpha_i=1}^{d_i} x_{\alpha_i}^{(i)} e_{\alpha_i}^{(i)}, \quad (1-3)$$

из полилинейности отображения  $\varphi$  вытекает равенство

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x_{\alpha_1}^{(1)} \cdot x_{\alpha_2}^{(2)} \cdot \dots \cdot x_{\alpha_n}^{(n)} \cdot \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}). \quad (1-4)$$

Раскладывая векторы (1-2) по базису пространства  $W$ :

$$\varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}) = \sum_{\nu=1}^d a_{\nu}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot e_{\nu},$$

мы однозначно кодируем отображение  $\varphi$  набором из  $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n \cdot d$  чисел

$$a_{\nu}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \in \mathbb{k},$$

---

<sup>1</sup>или *n-линейным*, когда желательно точно указать количество аргументов

которые организуются в  $(n + 1)$ -мерную матрицу<sup>1</sup> размера  $d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n \times d$ . Формула (1-4) переписывается через эти матричные элементы как

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{v, \alpha_1, \dots, \alpha_n} a_v^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot x_{\alpha_1}^{(1)} \cdot x_{\alpha_2}^{(2)} \cdot \dots \cdot x_{\alpha_n}^{(n)} \cdot e_v.$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа соответствующие этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, пространство полилинейных отображений изоморфно пространству многомерных матриц, и базису пространства матриц, состоящему из матриц с единицей в позиции  $(i_1, i_2, \dots, i_n, j)$  и нулями в остальных местах, отвечает базис пространства полилинейных отображений, состоящий из отображений  $\delta_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}^j$ , которые действуют на набор векторов (1-3) по правилу

$$\delta_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}^j : (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto x_{i_1}^{(1)} \cdot x_{i_2}^{(2)} \cdot \dots \cdot x_{i_n}^{(n)} \cdot e_j, \quad (1-5)$$

а на базисные векторы (1-3) — по правилу

$$\delta_{(i_1, i_2, \dots, i_n)}^j : (e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}) \mapsto \begin{cases} e_j, & \text{если } \alpha_k = i_k \ \forall k \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1-6)$$

**Замечание 1.1.** Если всюду в предыдущем примере заменить слова «размерность» и «векторное пространство» словами «ранг» и «свободный модуль», то всё сказанное останется справедливым для любых *свободных* модулей конечного ранга над произвольным коммутативным кольцом  $K$ .

**1.1.1. Универсальное полилинейное отображение.** Рассмотрим произвольное полилинейное отображение модулей над любым коммутативным кольцом  $K$

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow U. \quad (1-7)$$

Для всякого  $K$ -модуля  $W$  взятие композиции полилинейного отображения (1-7) со всевозможными линейными операторами  $F : U \rightarrow W$  задаёт *линейное* отображение модулей

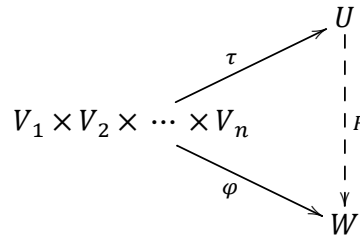
$$\text{Hom}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F \circ \tau} \text{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W). \quad (1-8)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1**

Полилинейное отображение (1-7) называется *универсальным*, если для каждого модуля  $W$  линейный оператор (1-8) является изоморфизмом. Иначе говоря, полилинейное отображение  $\tau$  универсально, если для любого модуля  $W$  и любого полилинейного отображения  $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  существует единственный линейный оператор  $F : U \rightarrow W$  такой, что  $\varphi = F \circ \tau$ , т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в

<sup>1</sup>при  $n = 1$  получается обычная 2-мерная матрица (1-) линейного отображения  $V \rightarrow W$  размера  $k \times m$ , где  $k = \dim V$ ,  $m = \dim W$

диаграмме



всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

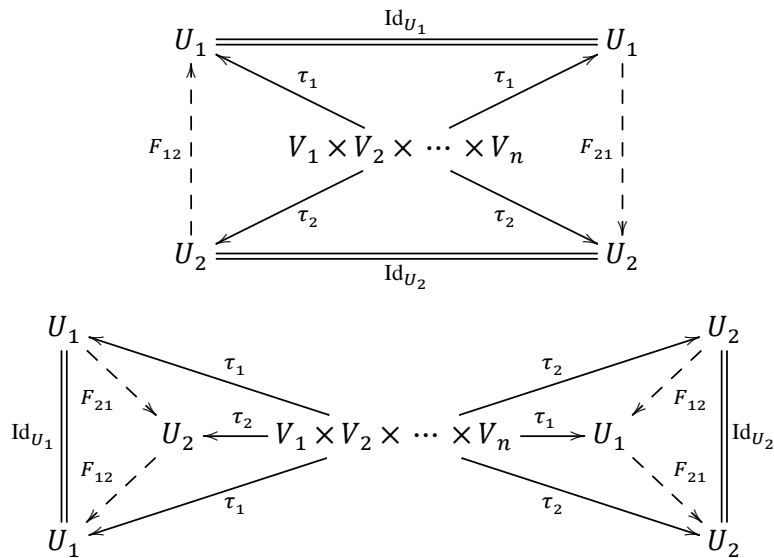
**ЛЕММА 1.1**

Для любых двух универсальных полилинейных отображений

$$\tau_1 : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow U_1 \quad \text{и} \quad \tau_2 : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow U_2$$

существует единственный такой линейный изоморфизм  $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ , что  $\tau_2 = \iota \tau_1$ .

**Доказательство.** Поскольку  $U_1$  и  $U_2$  оба универсальны, существуют единственные линейные операторы  $F_{21} : U_1 \rightarrow U_2$  и  $F_{12} : U_2 \rightarrow U_1$ , которые встраиваются в коммутативные диаграммы



показывающие, что  $F_{21}F_{12} = \text{Id}_{U_2}$  и  $F_{12}F_{21} = \text{Id}_{U_1}$ , т. к. представления самих универсальных полилинейных отображений в виде  $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$  и  $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$  в силу единственности таких представлений возможны только с  $\varphi = \text{Id}_{U_1}$ ,  $\psi = \text{Id}_{U_2}$ .  $\square$

**1.2. Тензорное произведение модулей.** Универсальное полилинейное отображение называется *тензорным произведением векторов* и обозначается через

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n. \tag{1-9}$$

Единственный с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с тензорным произведением векторов, модуль  $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$  называется *тензорным произведением* модулей  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , а его элементы — *тензорами*. Тензорные произведения векторов принято записывать как

$$\tau(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n. \quad (1-10)$$

Они составляют образ универсального полилинейного отображения (1-9) и называются *разложимыми* тензорами. Поскольку отображение (1-9) не линейно, а полилинейно, его образ, т. е. множество разложимых тензоров, обычно не образует подмодуля<sup>1</sup>. Наугад взятый тензор, являющийся линейной комбинацией мономов (1-10), скорее всего не раскладывается в произведение векторов.

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Выведите из универсального свойства тензорного произведения, что разложимые тензоры линейно порождают модуль  $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ .

**1.2.1. Существование тензорного произведения.** Предыдущее определение гарантирует единственность универсального полилинейного отображения, но не даёт никаких гарантий его существования. Сейчас мы построим модуль  $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$  при помощи образующих и соотношений. Рассмотрим свободный  $K$ -модуль  $\mathcal{V}$ , базисом в котором по определению являются всевозможные  $n$ -буквенные слова

$$[v_1 v_2 \dots v_n],$$

$i$ -той буквой которых может быть любой вектор  $v_i \in V_i$ . В этом большом модуле рассмотрим подмодуль  $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$ , порождённый всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\dots (\lambda u + \mu w) \dots] - \lambda [\dots u \dots] - \mu [\dots w \dots], \quad (1-11)$$

где обозначенные многоточиями буквы не меняются. Положим по определению

$$\begin{aligned} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n &= \mathcal{V}/\mathcal{R} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n &= [v_1 v_2 \dots v_n] \pmod{\mathcal{R}}. \end{aligned} \quad (1-12)$$

Иными словами,  $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$  есть модуль, образованный конечными  $K$ -линейными комбинациями формальных тензорных мономов  $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ , в которых  $v_i \in V_i$  и которые подчиняются соотношениям дистрибутивности: если любой из сомножителей (при фиксированных остальных) записать в виде линейной комбинации векторов, то полученное произведение можно преобразовать по стандартному правилу для раскрытия скобок:

$$\cdots \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes \cdots = \lambda \cdot (\cdots \otimes u \otimes \cdots) - \mu \cdot (\cdots \otimes w \otimes \cdots). \quad (1-13)$$

ЛЕММА 1.2

Отображение  $\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto [v_1 v_2 \dots v_n] \pmod{\mathcal{R}}} \mathcal{V}/\mathcal{R}$  является универсальным полилинейным отображением.

<sup>1</sup>мы ещё вернёмся к этому в прим. 1.2 и п° 1.2.2

Доказательство. Полилинейность отображения  $\tau$  тавтологически следует из наложенных нами соотношений и выражается в точности формулой (1-13). Проверим его универсальность. Для любого отображения множеств  $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  существует единственное линейное отображение  $F : \mathcal{V} \rightarrow W$ , переводящее базисный вектор  $[v_1 v_2 \dots v_n] \in \mathcal{V}$  в  $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Для того, чтобы это отображение было корректно определено на фактор модуле  $\mathcal{V}/\mathcal{R}$ , достаточно проверить, что  $\mathcal{R} \subset \ker F$ . Для каждого соотношения (1-11) из полилинейности  $\varphi$  и линейности  $F$  получаем

$$\begin{aligned} F([\dots (\lambda u + \mu w) \dots] - \lambda [\dots u \dots] - \mu [\dots w \dots]) &= \\ &= F([\dots (\lambda u + \mu w) \dots]) - \lambda F([\dots u \dots]) - \mu F([\dots w \dots]) = \\ &= \varphi(\dots, (\lambda u + \mu w), \dots) - \lambda \varphi(\dots, u, \dots) - \mu \varphi(\dots, w, \dots) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось.  $\square$

#### ТЕОРЕМА 1.1

Если каждый из модулей  $V_i$  свободен с базисом  $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$ , то их тензорное произведение  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$  также свободно с базисом

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}, \quad 1 \leq \alpha_i \leq d_i, \quad (1-14)$$

в частности,  $\text{rk } V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n = \prod \text{rk } V_i$ .

Доказательство. Обозначим через  $\mathcal{W}$  свободный модуль с базисом из всех выражений (1-14), которые мы временно будем воспринимать просто как формальные символы. Полилинейное отображение  $\tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathcal{W}$ , переводящее каждый набор базисных векторов  $(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  в соответствующий базисный символ (1-14) модуля  $\mathcal{W}$ , является универсальным, поскольку для любого полилинейного  $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  и линейного  $F : \mathcal{W} \rightarrow W$  равенство  $\varphi = F \circ \tau$  однозначно задаёт действие  $F$  на каждый базисный вектор:

$$F(e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}) = \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)})$$

и тем самым однозначно задаёт  $F$ . По лем. 1.1 имеется единственный изоморфизм  $\mathcal{W} \simeq V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ , переводящий формальные базисные векторы (1-14) пространства  $\mathcal{W}$  в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, лежащие в  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ . Тем самым, последние тоже образуют базис.  $\square$

Замечание 1.2. (о бесконечномерных пространствах) Последняя теор. 1.1 остаётся справедливой и для произведений свободных модулей бесконечного ранга: дословно то же рассуждение показывает, что свободный модуль, образованный всевозможными конечными линейными комбинациями базисных мономов<sup>1</sup> (1-14), обладает требуемым универсальным свойством. Например, если  $V_i = \mathbb{k}[x_i]$ , то

$$\mathbb{k}[x_1] \otimes \mathbb{k}[x_2] \otimes \dots \otimes \mathbb{k}[x_n] \simeq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Изоморфизм сопоставляет каждому базисному произведению  $x_1^{m_1} \otimes x_2^{m_2} \otimes \dots \otimes x_n^{m_n}$  обычный моном  $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ .

<sup>1</sup> которых в бесконечномерном случае будет бесконечно много

ПРИМЕР 1.2 (многообразия Сегре)

Из теор. 1.1 вытекает, что тензорное произведение  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$  векторных пространств  $V_1, V_2, \dots, V_n$  над полем  $\mathbb{k}$  линейно порождается разложимыми тензорами. При этом само множество разложимых тензоров, как уже говорилось, векторным пространством обычно не является и образует внутри  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$  нелинейное подмногообразие, проективизация которого называется *многообразием Сегре*.

Говоря точнее, многообразие Сегре определяется как образ отображения Сегре

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \rightarrow \mathbb{P}_m,$$

которое действует из прямого произведения проективных пространств  $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$  в проективное пространство  $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n)$  и переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы  $v_i \in V_i$ , в одномерное подпространство, порождённое разложимым тензором  $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Проверьте, что это отображение корректно определено<sup>1</sup> и является вложением.

По построению, многообразие Сегре замечается  $n$  семействами проективных подпространств размерностей  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

**1.2.2. Линейные операторы как тензоры.** Для любых векторных пространств  $U$  и  $W$  имеется каноническое билинейное отображение  $U^* \times W \rightarrow \text{Hom}(U, W)$ , переводящее пару  $(\xi, w) \in U^* \times W$  в линейный оператор  $U \rightarrow W$ , действующий по правилу

$$U \ni u \mapsto \xi(u)w \in W. \quad (1-15)$$

Это оператор ранга 1, образом которого является 1-мерное подпространство в  $W$ , натянутое на вектор  $w$ , а ядром — подпространство  $\text{Ann}(\xi) \subset U$  коразмерности 1.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Покажите, что всякий оператор  $F : U \rightarrow W$  ранга 1 представляется в виде (1-15) с подходящими ненулевыми  $\xi \in U^*$  и  $w \in W$ , которые определяются по  $F$  однозначно с точностью до пропорциональности.

В силу универсальности тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$U^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(U, W) \quad (1-16)$$

переводящее каждый разложимый тензор  $\xi \otimes w$  в оператор (1-15). Если оба пространства  $U$  и  $W$  конечномерны, то это отображение является изоморфизмом. Чтобы убедиться в этом, зафиксируем в пространствах  $U$  и  $W$  базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m.$$

По лем. 1.2 в качестве базиса в тензорном произведении  $U^* \otimes W$  можно взять  $mn$  разложимых тензоров  $u_i^* \otimes w_j$ , в которых  $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^* \in U^*$  составляют двойственный к  $u_1, u_2, \dots, u_n$  базис пространства  $U^*$ . Соответствующие этим тензорам операторы действуют на базисные векторы пространства  $U$  по правилу

$$u_i^* \otimes w_j : u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

<sup>1</sup>т. е. тензор  $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$  отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов  $v_i$  на пропорциональные

т. е. матрица оператора  $u_i^* \otimes w_j$  в выбранных базисах имеет единицу в пересечении  $j$ -той строки и  $i$ -того столбца и нулями в остальных местах. Тем самым, стандартный базис тензорного произведения  $U^* \otimes V$  переводится в стандартный базис пространства операторов.

На геометрическом языке операторы ранга 1, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, составляют многообразие Сегре

$$S \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\text{Hom}(U, W)).$$

Оно линейно порождает всё пространство  $\mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$ . Если использовать в качестве однородных координат на  $\mathbb{P}(\text{Hom}(V, W))$  матричные элементы  $(a_{ij})$  операторов в каких-нибудь фиксированных базисах, то многообразие Сегре можно задать в этих координатах системой квадратичных уравнений — обращением в нуль всех миноров второго порядка:

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0.$$

Отображение Сегре  $\mathbb{P}_{n-1} \times \mathbb{P}_{m-1} = \mathbb{P}(U^*) \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$  переводит пару точек  $(\xi, w)$  в точку  $\xi \otimes w$  и устанавливает биекцию между произведением проективных пространств и многообразием Сегре. На координатном языке пара точек с однородными координатами  $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$  и  $(y_1 : y_2 : \dots : y_m)$  переводится в точку, однородными координатами которой являются  $mn$  всевозможных произведений  $x_j y_i$ , т. е. матрица  $y^t \cdot x$  ранга 1 (произведение столбца  $y$  на строку  $x$ ). Два семейства «координатных плоскостей»  $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$  и  $\mathbb{P}_{n-1} \times w$  при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заметающих многообразие Сегре.

ПРИМЕР 1.3 (КВАДРИКА СЕГРЕ В  $\mathbb{P}_3$ )

При  $\dim U = \dim W = 2$  мы получаем биекцию между  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$  и детерминантной квадратикой Сегре в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{Mat}_2(\mathbb{k}))$ , состоящей из классов пропорциональных матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 0.$$

Эта биекция переводит пару точек  $\xi = (\xi_0 : \xi_1) \in \mathbb{P}(U^*)$  и  $w = (t_0 : t_1) \in W$  в матрицу

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot (\xi_0 \quad \xi_1) = \begin{pmatrix} \xi_0 t_0 & \xi_1 t_0 \\ \xi_0 t_1 & \xi_1 t_1 \end{pmatrix} \quad (1-17)$$

и отображает два семейства координатных прямых  $\mathbb{P}_1 \times v$  и  $\xi \times \mathbb{P}_1$  на  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$  в два семейства проективных прямых на квадратике Сегре, образованных проективизациями двумерных подпространств из матриц ранга 1, у которых

$$\begin{aligned} ([\text{строка 1}] : [\text{строка 2}]) &= (t_0 : t_1) \\ ([\text{столбец 1}] : [\text{столбец 2}]) &= (\xi_0 : \xi_1). \end{aligned}$$

В каждом из двух семейств прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются. Каждая точка квадратика является точкой пересечения пары прямых из различных семейств, и никаких других прямых на квадратике Сегре нет.

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Докажите все эти геометрические утверждения.

**1.2.3. Тензорные произведения абелевых групп.** В общем случае модулей над произвольным коммутативным кольцом из данного нами в н° 1.2 описания тензорного произведения  $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$  в терминах образующих и соотношений не всегда очевидно его строение и даже отлично ли оно от нуля. Проиллюстрируем это на примере вычисления тензорных произведений конечно порождённых  $\mathbb{Z}$ -модулей.

Покажем, что при взаимно простых  $m$  и  $n$  произведение  $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n) = 0$ , т. е. является тривиальным модулем, состоящим лишь из нулевого вектора. При  $(m, n) = 1$  класс  $[n]_m \in \mathbb{Z}/(m)$  обратим в кольце  $\mathbb{Z}/(m)$ , и каждое число  $a \in \mathbb{Z}/(m)$  представляется в виде  $a = n \cdot a'$ , где  $a' = [n]^{-1}a$ . С другой стороны, для любого  $b \in \mathbb{Z}/(n)$  произведение  $nb = 0$  в  $\mathbb{Z}/(n)$ . В силу полилинейности тензорного произведения для любого разложимого тензора  $a \otimes b \in \mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} a \otimes b &= (n \cdot a') \otimes b = n \cdot (a' \otimes b) = a' \otimes (n \cdot b) = \\ &= a' \otimes 0 = a' \otimes (0 \cdot 0) = 0 \cdot (a' \otimes 0) = 0, \end{aligned}$$

Т. к. разложимые тензоры линейно порождают  $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$ , этот модуль нулевой.

Вычислим теперь тензорное произведение  $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{Z}/(p^m)$  при  $n \leq m$ . отображение  $\mu : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \rightarrow \mathbb{Z}/(p^n)$ , переводящее пару вычетов  $([a]_{p^n}, [b]_{p^m})$  в вычет  $[ab]_{p^n} = ab \cdot [1]_{p^n}$  билинейно. Покажем, что оно универсально. Для любого билинейного отображения  $\varphi : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \rightarrow W$  выполняется равенство  $\varphi([a]_{p^n}, [b]_{p^m}) = ab \cdot \varphi([1]_{p^n}, [1]_{p^m})$ , из которого вытекает, что линейное отображение  $F : \mathbb{Z}/(p^n) \rightarrow W$ , такое что  $\varphi = F \circ \mu$ , обязано переводить образующий элемент  $[1]_{p^n} \in \mathbb{Z}/(p^n)$  в  $\varphi([1]_{p^n}, [1]_{p^m})$ . Таким образом, отображение  $F$  единственно, если существует. Единственным соотношением на образующую  $e = [1]_{p^n} \in \mathbb{Z}/(p^n)$  является равенство  $p^n \cdot e = 0$ , и элемент  $\varphi([1]_{p^n}, [1]_{p^m})$  удовлетворяет этому соотношению, т. к.  $p^n \cdot \varphi([1]_{p^n}, [1]_{p^m}) = \varphi(p^n \cdot [1]_{p^n}, [1]_{p^m}) = \varphi(0, [1]_{p^m}) = 0$ . Поэтому правило  $[1]_{p^n} \mapsto \varphi([1]_{p^n}, [1]_{p^m})$  корректно определяет отображение  $F : \mathbb{Z}/(p^n) \rightarrow W$ , что доказывает универсальность. Итак,  $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{Z}/(p^m) \simeq \mathbb{Z}/(p^{\min(n,m)})$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 1.5.** Покажите, что  $\mathbb{Z} \otimes A \simeq A$  для любой абелевой группы  $A$ .

Вычисление тензорных произведений произвольных конечно порождённых абелевых групп сводится к рассмотренным случаям при помощи канонических изоморфизмов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, обсуждаемых ниже.

**1.3. Канонические изоморфизмы.** Всюду далее речь идёт о произвольных модулях над любым коммутативным кольцом  $K$ . Линейные отображения

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \rightarrow W \quad (1-18)$$

часто хочется задавать указанием значений  $f$  на множестве разложимых векторов

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad (1-19)$$

а затем по линейности продолжать это правило на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают  $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ , такое описание однозначно определяет  $f$  при условии, что оно корректно: множество разложимых тен-



зоров, как правило, линейно зависимо<sup>1</sup>, и все имеющиеся между ними линейные соотношения должны выполняться и между векторами (1-19) в модуле  $W$ . Поскольку эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности (1-13), мы приходим к следующему критерию.

**ЛЕММА 1.3**

Если векторы  $f(v_1, v_2, \dots, v_n)$  в (1-19) полилинейно зависят от векторов  $v_i$  (т. е. линейны по каждому  $v_i$  при фиксированных остальных), то существует единственное линейное отображение (1-18), действующее на разложимые тензоры по правилу

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto f(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1**

Имеется канонический изоморфизм  $U \otimes W \simeq W \otimes U$ , переводящий друг в друга разложимые тензоры  $u \otimes w$  и  $w \otimes u$ .

**Доказательство.** Правило  $u \otimes w \mapsto w \otimes u$  билинейно по  $u, w$  и по лем. 1.3 корректно определяет линейное отображение  $U \otimes W \rightarrow W \otimes U$ . По тем же причинам существует линейное отображение  $W \otimes U \rightarrow U \otimes W$ , переводящее  $w \otimes u$  в  $u \otimes w$ . Эти два отображения обратны друг другу (поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах, линейно порождающих тензорное произведение), и значит, являются изоморфизмами.  $\square$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2**

Имеются канонические изоморфизмы  $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$ , переводящие друг в друга разложимые тензоры  $v \otimes (u \otimes w)$ ,  $v \otimes u \otimes w$  и  $(v \otimes u) \otimes w$ .

**Доказательство.** Тензор  $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$  трилинейно зависит от  $(v, u, w)$ . Следовательно, по лем. 1.3 имеется линейное отображение  $V \otimes U \otimes W \rightarrow V \otimes (U \otimes W)$ , переводящее  $v \otimes u \otimes w$  в  $v \otimes (u \otimes w)$ . Обратное отображение строится в два шага. При каждом  $v \in V$  тензор  $v \otimes u \otimes w$  билинейно зависит от  $u$  и  $w$ , и значит, по лем. 1.3 мы имеем линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \xrightarrow{u \otimes w \mapsto v \otimes u \otimes w} V \otimes U \otimes W,$$

которое само по себе линейно зависит от  $v$ , т. е. тензор  $\tau_v(t) = v \otimes t$  билинеен по  $v \in V$  и  $t \in U \otimes W$ . По лем. 1.3 существует линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \rightarrow V \otimes U \otimes W,$$

переводящее  $v \otimes (u \otimes w)$  в  $v \otimes u \otimes w$ , что и требовалось. Изоморфизм между  $V \otimes U \otimes W$  и  $(V \otimes U) \otimes W$  устанавливается аналогично.  $\square$

<sup>1</sup>например, если  $K$  — бесконечное поле, а  $V_i$  — конечномерные пространства, пространство  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$  тоже конечномерно, а разложимых тензоров в нём бесконечно много

Предложение 1.3

Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V),$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dot{+} w) \mapsto (v \otimes u) \dot{+} (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dot{+} w) \otimes v \mapsto (u \otimes v) \dot{+} (w \otimes v)$$

где через  $a \dot{+} b$  для  $a \in A$  и  $b \in B$  обозначено сложение элементов  $(a, 0)$  и  $(0, b)$  в прямой сумме модулей  $A \oplus B$ .

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм — второй получится из него применением предл. 1.1. Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \xrightarrow{v \otimes (u \dot{+} w) \mapsto (v \otimes u) \dot{+} (v \otimes w)} (V \otimes U) \oplus (V \otimes W)$$

существует, поскольку  $(v \otimes u) \dot{+} (v \otimes w)$  билинеен по  $v$  и  $u \dot{+} w$ . Обратное отображение снова строится в два шага: сначала убеждаемся в наличии линейных отображений

$$\varphi_1 : V \otimes U \rightarrow V \otimes (U \oplus W) \quad \text{и} \quad \varphi_2 : V \otimes W \rightarrow V \otimes (U \oplus W),$$

действующих на разложимые тензоры по правилам

$$v \otimes u \mapsto v \otimes (u \dot{+} 0) \quad \text{и} \quad v \otimes w \mapsto v \otimes (0 \dot{+} w),$$

затем комбинируем их в отображение

$$\psi : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \xrightarrow{a \dot{+} b \mapsto \varphi_1(a) + \varphi_2(b)} V \otimes (U \oplus W),$$

очевидно, линейное и обратное к построенному в начале доказательства.  $\square$

**1.4. Тензорное произведение линейных отображений.** Рассмотрим конечный набор линейных отображений  $f_i : U_i \rightarrow W_i$  между произвольными модулями над любым коммутативным кольцом. Поскольку тензор

$$f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n) \in W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$$

полилинеен по  $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ , правило

$$u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n)$$

корректно задаёт линейное отображение, которое обозначается

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n \rightarrow W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$$

и называется *тензорным произведением* отображений  $f_i : U_i \rightarrow W_i$ .

ПРИМЕР 1.4 (ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЛОЖЕНИЯ С ТОЖДЕСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ)  
Если отображение  $f : U \hookrightarrow W$  инъективно, а модуль  $F$  свободен, то произведение

$$f \otimes \text{Id}_F : U \otimes F \rightarrow W \otimes F \quad (1-20)$$

также инъективно. Это очевидно, когда  $F = K \cdot e$  имеет ранг 1: правила  $u \otimes (\lambda e) \mapsto \lambda u$  и  $w \otimes (\mu e) \mapsto \mu w$  задают изоморфизмы  $U \otimes F \simeq U$  и  $W \otimes F \simeq W$ , отождествляющие отображение (1-20) с исходным отображением  $f : U \hookrightarrow W$ . Свободный модуль  $F$  большего ранга является прямой суммой свободных модулей ранга 1, и по предл. 1.3 модули  $U \otimes F \simeq U^{\oplus \text{rk} F}$  и  $W \otimes F \simeq W^{\oplus \text{rk} F}$  суть прямые суммы  $\text{rk} F$  одинаковых копий исходных модулей, а отображение (1-20) действует на них по правилу  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto (f_1(u_1), f_2(u_2), \dots, f_n(u_n))$  и очевидно инъективно.

Если модуль  $F$  не свободен, произведение (1-20) может оказаться не инъективным даже когда  $f : U \hookrightarrow W$  это вложение свободных модулей. Например, вложение  $\mathbb{Z}$ -модулей  $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$  по правилу  $z \mapsto 2z$  при тензорном умножении на  $\mathbb{Z}/(2)$  превращается в нулевое отображение  $f \otimes \text{Id}_{\mathbb{Z}/(2)} : \mathbb{Z}/(2) \rightarrow \mathbb{Z}/(2)$ , переводящее  $[1]_2$  в  $[0]_2$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Покажите, что сюръективность отображения  $f : U \rightarrow W$  всегда влечёт за собой сюръективность отображения  $f \otimes \text{Id}_V : U \otimes V \rightarrow W \otimes V$  для любых модулей  $U, V, W$  над любым коммутативным кольцом  $K$ .

ТЕОРЕМА 1.2

Пусть  $U \simeq F/R_U$  и  $W \simeq G/R_W$ , где  $F$  и  $G$  — свободные модули над произвольным коммутативным кольцом  $K$ , а  $R_U \subset F$  и  $R_W \subset G$  суть подмодули соотношений, определяющих модули  $U$  и  $W$ . Тогда

$$U \otimes W \simeq \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W},$$

где  $R_U \otimes G + F \otimes R_W$  есть линейная оболочка подмодулей  $R_U \otimes G$  и  $F \otimes R_W$  свободного модуля  $F \otimes G$ , вложенных в него согласно прим. 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставление элементам  $f \pmod{R_U} \in F/R_U$  и  $g \pmod{R_G} \in G/R_W$  элемента  $f \otimes g \pmod{(R_U \otimes G + F \otimes R_W)}$  корректно, поскольку при  $u \in R_U$  и  $w \in R_W$

$$(f + u) \otimes (g + w) = f \otimes g + (u \otimes g + f \otimes w + u \otimes w) \equiv f \otimes g \pmod{(R_U \otimes G + F \otimes R_W)},$$

и задаёт билинейное отображение

$$\bar{\tau} : U \times W \rightarrow \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W}, \quad (1-21)$$

которое включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F \times G & \xrightarrow{\tau} & F \otimes G \\ \pi_U \times \pi_W \downarrow & & \downarrow \pi \\ U \times W & \xrightarrow{\bar{\tau}} & \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \end{array} \quad (1-22)$$

где  $\pi_U : F \twoheadrightarrow U$ ,  $\pi_W : G \twoheadrightarrow W$  и  $\pi : F \otimes G \twoheadrightarrow (F \otimes G)/(R_U \otimes G + F \otimes R_W)$  означают отображения факторизации, а  $\tau : F \times G \rightarrow F \otimes G$  — универсальное билинейное отображение. Покажем, что билинейное отображение (1-21) тоже универсально.

Всякое билинейное отображение  $\varphi : U \times W \rightarrow H$  индуцирует полилинейное отображение  $\hat{\varphi} : F \times G \rightarrow H$  по правилу

$$(f, g) \mapsto \varphi ( f (\text{mod } R_U) , g (\text{mod } R_W) ) , \quad (1-23)$$

а значит, существует линейное отображение  $\psi : F \otimes G \rightarrow H$ , такое что

$$\psi(f \otimes g) = \varphi ( f (\text{mod } R_U) , g (\text{mod } R_W) ) .$$

Поскольку  $\psi$  аннулирует подмодули  $R_U \otimes G$  и  $F \otimes R_W$ , оно корректно спускается до линейного отображения

$$\bar{\psi} : \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \rightarrow H ,$$

такого что  $\bar{\psi} \circ \tau = \varphi$ . С другой стороны, если линейное отображение

$$\eta : \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \rightarrow H$$

тоже удовлетворяет равенству  $\eta \circ \tau = \varphi$ , то его композиция со стрелками  $\bar{\tau}$  и  $\pi_U \times \pi_W$  из диаграммы (1-22) задаёт билинейное отображение

$$\eta \circ \bar{\tau} \circ (\pi_U \times \pi_W) : F \times G \rightarrow H \quad (1-24)$$

действующее на пару  $(f, g) \in F \times G$  в точности по формуле (1-23) и, стало быть, совпадающее равно  $\hat{\psi}$ . В силу универсальности  $\tau$  композиция (1-24) равна  $\psi \circ \tau$ , откуда в виду коммутативности диаграммы (1-22) вытекает равенство  $\eta \circ \pi = \psi$ , а с ним и равенство  $\eta = \bar{\psi}$ .  $\square$

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 1.1. Из единственности подъёма полилинейной формы  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{k}$  до линейной формы  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow \mathbb{k}$  вытекает, что единственная линейная форма  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow \mathbb{k}$ , обращающая в нуль на всех разложимых тензорах, это нулевая форма. Поэтому разложимые тензоры не содержатся ни в каком собственном подпространстве.
- Упр. 1.3. Образ оператора  $F : U \rightarrow W$  ранга 1 одномерен и натянут на некий ненулевой вектор  $w$ , единственный с точностью до пропорциональности. Значение  $F$  на произвольном векторе  $u \in U$  равно  $F(u) = \xi(u) \cdot w$ , где  $\xi \in U^*$  отличен от нуля и лежит в одномерном подпространстве  $\text{Ann ker } F$ .
- Упр. 1.4. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как и между координатными прямыми на  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ . Т. к. всякая прямая, лежащая на квадрике Сегре и проходящая через заданную точку  $p$  содержится в конике, которая высекается из квадрики Сегре касательной плоскостью в точке  $p$  и полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке  $p$  образов координатных прямых с  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ , никаких других прямых на квадрике Сегре нет.
- Упр. 1.5. Модуль билинейных отображений  $Z \times A \rightarrow W$  изоморфен  $\text{Hom}(A, W)$ . Изоморфизм задаётся сопоставлением билинейному отображению  $\varphi$  его ограничения на  $1 \times A$ .
- Упр. 1.6. Достаточно убедиться в том, что все разложимые тензоры  $w \otimes v \in W \otimes V$  лежат в образе  $f \otimes \text{Id}_V$ , а это очевидно.