§1. Тензорные произведения

1.1. Полилинейные отображения. Рассмотрим модули $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W над произвольным коммутативным кольцом K. Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W \tag{1-1}$$

называется *полилинейным*[1], если оно линейно отдельно по каждому из своих аргументов при произвольным образом зафиксированных остальных:

$$\varphi(\dots, \lambda v' + \mu v'', \dots) = \lambda\, \varphi(\dots, v', \dots) + \mu\, \varphi(\dots, v'', \dots).$$

Например, 1-линейные отображения $V \to W$ это линейные операторы, а 2-линейные отображения $V \times V \to K$ это билинейные формы на модуле V.

Полилинейные отображения (1-1) можно обычным образом складывать и умножать на числа из K, так что они тоже образуют K-модуль. Он называется *модулем полилинейных отображений* и обозначается через $\mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ или, когда важно явно указать кольцо, — через $\mathrm{Hom}_K(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$.

Пример 1.1 (полилинейные отображения векторных пространств)
Если $K = \Bbbk$ — поле, а $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W — векторные пространства размерностей $d_1, d_2, \dots, d_n$ и d, то $\dim \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n \cdot d$. Чтобы убедиться в этом, зафиксируем в каждом пространстве V_i некоторый базис $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \dots, e^{(i)}_{d_i}$, а также базис $e_1, e_2, \dots, e_d$ в W. Отображение (1-1) однозначно определяется своими значениями

$$\varphi\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big) \in W \tag{1-2}$$

на всевозможных сочетаниях базисных векторов из пространств V_i, т. к. для произвольного набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$, раскладывающихся по базисам как

$$v_i = \sum_{\alpha_i = 1}^{d_i} x^{(i)}_{\alpha_i}\, e^{(i)}_{\alpha_i}, \tag{1-3}$$

из полилинейности отображения φ вытекает равенство

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x^{(1)}_{\alpha_1} \cdot x^{(2)}_{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot x^{(n)}_{\alpha_n} \cdot \varphi\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big). \tag{1-4}$$

Раскладывая векторы (1-2) по базису пространства W:

$$\varphi\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big) = \sum_{\nu=1}^{d} a^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{\nu} \cdot e_\nu,$$

мы однозначно кодируем отображение φ набором из $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n \cdot d$ чисел

$$a^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{\nu} \in \Bbbk,$$

[1] или *n-линейным*, когда желательно точно указать количество аргументов

которые организуются в $(n+1)$-мерную матрицу[1] размера $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n \times d$. Формула (1-4) переписывается через эти матричные элементы как

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\nu,\alpha_1,\dots,\alpha_n} a_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} \cdot x_{\alpha_1}^{(1)} \cdot x_{\alpha_2}^{(2)} \cdot \cdots \cdot x_{\alpha_n}^{(n)} \cdot e_\nu \,.$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа соответствующие этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, пространство полилинейных отображений изоморфно пространству многомерных матриц, и базису пространства матриц, состоящему из матриц с единицей в позиции $(i_1, i_2, \dots, i_n, j)$ и нулями в остальных местах, отвечает базис пространства полилинейных отображений, состоящий из отображений $\delta^j_{(i_1,i_2,\dots,i_n)}$, которые действуют на набор векторов (1-3) по правилу

$$\delta^j_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} : (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto x_{i_1}^{(1)} \cdot x_{i_2}^{(2)} \cdot \cdots \cdot x_{i_n}^{(n)} \cdot e_j \,, \tag{1-5}$$

а на базисные векторы (1-3) — по правилу

$$\delta^j_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} : \left(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)} \right) \mapsto \begin{cases} e_j\,, & \text{если } \alpha_k = i_k \ \forall\, k \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1-6}$$

Замечание 1.1. Если всюду в предыдущем примере заменить слова «размерность» и «векторное пространство» словами «ранг» и «свободный модуль», то всё сказанное останется справедливым для любых *свободных* модулей конечного ранга над произвольным коммутативным кольцом K.

1.1.1. Универсальное полилинейное отображение. Рассмотрим произвольное полилинейное отображение модулей над любым коммутативным кольцом K

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U \,. \tag{1-7}$$

Для всякого K-модуля W взятие композиции полилинейного отображения (1-7) со всевозможными линейными операторами $F : U \to W$ задаёт *линейное* отображение модулей

$$\mathrm{Hom}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F \circ \tau} \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) \,. \tag{1-8}$$

Определение 1.1

Полилинейное отображение (1-7) называется *универсальным*, если для каждого модуля W линейный оператор (1-8) является изоморфизмом. Иначе говоря, полилинейное отображение τ универсально, если для любого модуля W и любого полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$ существует единственный линейный оператор $F : U \to W$ такой, что $\varphi = F \circ \tau$, т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в

[1] при $n = 1$ получается обычная 2-мерная матрица (1-) линейного отображения $V \to W$ размера $k \times m$, где $k = \dim V$, $m = \dim W$

диаграмме

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dd, dashed, "F"] \\ V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & W \end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

Лемма 1.1

Для любых двух универсальных полилинейных отображений

$$\tau_1 : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U_1 \qquad \text{и} \qquad \tau_2 : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U_2$$

существует единственный такой линейный изоморфизм $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, что $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. Поскольку и U_1, и U_2 оба универсальны, существуют единственные линейные операторы $F_{21} : U_1 \to U_2$ и $F_{12} : U_2 \to U_1$, которые встраиваются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"] & & U_1 \arrow[dd, dashed, "F_{21}"] \\ & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ul, "\tau_1"] \arrow[ur, "\tau_1"'] \arrow[dl, "\tau_2"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\ U_2 \arrow[uu, dashed, "F_{12}"] \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"'] & & U_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] & & & & U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"'] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \\ & U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"] & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] & \\ U_1 & & & & U_2 \end{tikzcd}$$

показывающие, что $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$ и $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$, т. к. представления самих универсальных полилинейных отображений в виде $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ в силу единственности таковых представлений возможны только с $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

1.2. Тензорное произведение модулей. Универсальное полилинейное отображение называется *тензорным произведением векторов* и обозначается через

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \,. \tag{1-9}$$

Единственный с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с тензорным произведением векторов, модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* модулей $V_1, V_2, \dots, V_n$, а его элементы — *тензорами*. Тензорные произведения векторов принято записывать как

$$\tau(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n\,. \tag{1-10}$$

Они составляют образ универсального полилинейного отображения (1-9) и называются *разложимыми* тензорами. Поскольку отображение (1-9) не линейно, а полилинейно, его образ, т. е. множество разложимых тензоров, обычно не образует подмодуля[1]. Наугад взятый тензор, являющийся линейной комбинацией мономов (1-10), скорее всего не раскладывается в произведение векторов.

Упражнение 1.1. Выведите из универсального свойства тензорного произведения, что разложимые тензоры линейно порождают модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$.

1.2.1. Существование тензорного произведения. Предыдущее определение гарантирует единственность универсального полилинейного отображения, но не даёт никаких гарантий его существования. Сейчас мы построим модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ при помощи образующих и соотношений. Рассмотрим свободный K-модуль $\mathcal{V}$, базисом в котором по определению являются всевозможные n-буквенные слова

$$[v_1 v_2 \,\dots\, v_n]\,,$$

i-той буквой которых может быть любой вектор $v_i \in V_i$. В этом большом модуле рассмотрим подмодуль $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, порождённый всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\,\cdots\,(\lambda u + \mu w)\,\cdots\,] - \lambda\,[\,\cdots\,u\,\cdots\,] - \mu\,[\,\cdots\,w\,\cdots\,]\,, \tag{1-11}$$

где обозначенные многоточиями буквы не меняются. Положим по определению

$$\begin{gathered} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n = \mathcal{V}/\mathcal{R} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n = [v_1 v_2 \,\dots\, v_n] \pmod{\mathcal{R}}\,. \end{gathered} \tag{1-12}$$

Иными словами, $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ есть модуль, образованный конечными K-линейными комбинациями формальных тензорных мономов $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$, в которых $v_i \in V_i$ и которые подчиняются соотношениям дистрибутивности: если любой из сомножителей (при фиксированных остальных) записать в виде линейной комбинации векторов, то полученное произведение можно преобразовать по стандартному правилу для раскрытия скобок:

$$\cdots \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes \cdots = \lambda \cdot (\,\cdots \otimes u \otimes \cdots\,) - \mu \cdot (\,\cdots \otimes w \otimes \cdots\,)\,. \tag{1-13}$$

Лемма 1.2

Отображение $\tau \,:\, V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto [v_1 v_2 \,\dots\, v_n] \pmod{\mathcal{R}}} \mathcal{V}/\mathcal{R}$ является универсальным полилинейным отображением.

[1] мы ещё вернёмся к этому в прим. 1.2 и n° 1.2.2

Доказательство. Полилинейность отображения τ тавтологически следует из наложенных нами соотношений и выражается в точности формулой (1-13). Проверим его универсальность. Для любого отображения множеств $\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$ существует единственное линейное отображение $F : \mathcal{V} \to W$, переводящее базисный вектор $[v_1 v_2 \dots v_n] \in \mathcal{V}$ в $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на фактор модуле $\mathcal{V}/\mathcal{R}$, достаточно проверить, что $\mathcal{R} \subset \ker F$. Для каждого соотношения (1-11) из полилинейности φ и линейности F получаем

$$\begin{aligned}F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots] - \lambda\,[\dots u\dots] - \mu\,[\dots w\dots]\big) = \\ = F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots]\big) - \lambda F\big([\dots u\dots]\big) - \mu F\big([\dots w\dots]\big) = \\ = \varphi(\dots, (\lambda u + \mu w), \dots) - \lambda\,\varphi(\dots, u, \dots) - \mu\,\varphi(\dots, w, \dots) = 0\,,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Теорема 1.1

Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ также свободно с базисом

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}\,, \quad 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i\,, \tag{1-14}$$

в частности, $\operatorname{rk} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n = \prod \operatorname{rk} V_i$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}$ свободный модуль с базисом из всех выражений (1-14), которые мы временно будем воспринимать просто как формальные символы. Полилинейное отображение $\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to \mathcal{W}$, переводящее каждый набор базисных векторов $\big(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}\big) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ в соответствующий базисный символ (1-14) модуля $\mathcal{W}$, является универсальным, поскольку для любого полилинейного $\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$ и линейного $F : \mathcal{W} \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ однозначно задаёт действие F на каждый базисный вектор:

$$F(e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}) = \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)})$$

и тем самым однозначно задаёт F. По лем. 1.1 имеется единственный изоморфизм $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, переводящий формальные базисные векторы (1-14) пространства $\mathcal{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, лежащие в $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. □

Замечание 1.2. (о бесконечномерных пространствах) Последняя теор. 1.1 остаётся справедливой и для произведений свободных модулей *бесконечного* ранга: дословно то же рассуждение показывает, что свободный модуль, образованный всевозможными конечными линейными комбинациями базисных мономов[1] (1-14), обладает требуемым универсальным свойством. Например, если $V_i = \Bbbk[x_i]$, то

$$\Bbbk[x_1] \otimes \Bbbk[x_2] \otimes \cdots \otimes \Bbbk[x_n] \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]\,.$$

Изоморфизм сопоставляет каждому базисному произведению $x_1^{m_1} \otimes x_2^{m_2} \otimes \cdots \otimes x_n^{m_n}$ обычный моном $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$.

[1] которых в бесконечномерном случае будет бесконечно много

Пример 1.2 (многообразия Сегре)
Из теор. 1.1 вытекает, что тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ векторных пространств $V_1, V_2, \dots, V_n$ над полем $\Bbbk$ линейно порождается разложимыми тензорами. При этом само множество разложимых тензоров, как уже говорилось, векторным пространством обычно не является и образует внутри $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ нелинейное подмногообразие, проективизация которого называется *многообразием Сегре*.

Говоря точнее, многообразие Сегре определяется как образ *отображения Сегре*

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m ,$$

которое действует из прямого произведения проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n)$ и переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое разложимым тензором $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$.

Упражнение 1.2. Проверьте, что это отображение корректно определено[1] и является вложением.

По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, m_2, \dots, m_n$.

1.2.2. Линейные операторы как тензоры. Для любых векторных пространств U и W имеется каноническое билинейное отображение $U^* \times W \to \mathrm{Hom}(U, V)$, переводящее пару $(\xi, w) \in U^* \times W$ в линейный оператор $U \to W$, действующий по правилу

$$U \ni u \mapsto \xi(u)\, w \in W . \qquad (1\text{-}15)$$

Это оператор ранга 1, образом которого является 1-мерное подпространство в W, натянутое на вектор w, а ядром — подпространство $\mathrm{Ann}(\xi) \subset U$ коразмерности 1.

Упражнение 1.3. Покажите, что всякий оператор $F : U \to W$ ранга 1 представляется в виде (1-15) с подходящими ненулевыми $\xi \in U^*$ и $w \in W$, которые определяются по F однозначно с точностью до пропорциональности.

В силу универсальности тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V) \qquad (1\text{-}16)$$

переводящее каждый разложимый тензор $\xi \otimes w$ в оператор (1-15). Если оба пространства U и V конечномерны, то это отображение является изоморфизмом. Чтобы убедиться в этом, зафиксируем в пространствах U и W базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \qquad \text{и} \qquad w_1, w_2, \dots, w_m .$$

По лем. 1.2 в качестве базиса в тензорном произведении $U^* \otimes V$ можно взять mn разложимых тензоров $u_i^* \otimes w_j$, в которых $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^* \in U^*$ составляют двойственный к $u_1, u_2, \dots, u_n$ базис пространства U^*. Соответствующие этим тензорам операторы действуют на базисные векторы пространства U по правилу

$$u_i^* \otimes w_j : u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

[1] т. е. тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные

т. е. матрица оператора $u_i^* \otimes w_j$ в выбранных базисах имеет единицу в пересечении j-той строки и i-того столбца и нулями в остальных местах. Тем самым, стандартный базис тензорного произведения $U^* \otimes V$ переводится в стандартный базис пространства операторов.

На геометрическом языке операторы ранга 1, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, составляют многообразие Сегре

$$S \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))\,.$$

Оно линейно порождает всё пространство $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))$. Если использовать в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, W))$ матричные элементы (a_{ij}) операторов в каких-нибудь фиксированных базисах, то многообразие Сегре можно задать в этих координатах системой квадратичных уравнений — обращением в нуль всех миноров второго порядка:

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0\,.$$

Отображение Сегре $\mathbb{P}_{n-1} \times \mathbb{P}_{m-1} = \mathbb{P}(U^*) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))$ переводит пару точек (ξ, w) в точку $\xi \otimes w$ и устанавливает биекцию между произведением проективных пространств и многообразием Сегре. На координатном языке пара точек с однородными координатами $(x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$ и $(y_1 : y_2 : \cdots : y_n)$ переводится в точку, однородными координатами которой являются mn всевозможных произведений $x_j y_i$, т. е. матрица $y^t \cdot x$ ранга 1 (произведение столбца y на строку x). Два семейства «координатных плоскостей» $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$ и $\mathbb{P}_{n-1} \times w$ при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заметающих многообразие Сегре.

Пример 1.3 (квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$)
При $\dim U = \dim W = 2$ мы получаем биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и детерминантной квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)\right)$, состоящей из классов пропорциональных матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;:\; ad - bc = 0\,.$$

Эта биекция переводит пару точек $\xi = (\xi_0 : \xi_1) \in \mathbb{P}\left(U^*\right)$ и $w = (t_0 : t_1) \in W$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 t_0 & \xi_1 t_0 \\ \xi_0 t_1 & \xi_1 t_1 \end{pmatrix} \tag{1-17}$$

и отображает два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times v$ и $\xi \times \mathbb{P}_1$ на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в два семейства проективных прямых на квадрике Сегре, образованных проективизациями двумерных подпространств из матриц ранга 1, у которых

$$([\text{строка } 1] : [\text{строка } 2]) = (t_0 : t_1)$$
$$([\text{столбец } 1] : [\text{столбец } 2]) = (\xi_0 : \xi_1)\,.$$

В каждом из двух семейств прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются. Каждая точка квадрики является точкой пересечения пары прямых из различных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упражнение 1.4. Докажите все эти геометрические утверждения.

1.2.3. Тензорные произведения абелевых групп. В общем случае модулей над произвольным коммутативным кольцом из данного нами в n° 1.2 описания тензорного произведения $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ в терминах образующих и соотношений не всегда очевидно его строение и даже отлично ли оно от нуля. Проиллюстрируем это на примере вычисления тензорных произведений конечно порождённых $\mathbb{Z}$-модулей.

Покажем, что при взаимно простых m и n произведение $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n) = 0$, т. е. является тривиальным модулем, состоящим лишь из нулевого вектора. При $(m, n) = 1$ класс $[n]_m \in \mathbb{Z}/(m)$ обратим в кольце $\mathbb{Z}/(m)$, и каждое число $a \in \mathbb{Z}/(m)$ представляется в виде $a = n \cdot a'$, где $a' = [n]^{-1}a$. С другой стороны, для любого $b \in \mathbb{Z}/(n)$ произведение $nb = 0$ в $\mathbb{Z}/(n)$. В силу полилинейности тензорного произведения для любого разложимого тензора $a \otimes b \in \mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} a \otimes b = (n \cdot a') \otimes b = n \cdot (a' \otimes b) = a' \otimes (n \cdot b) = \\ = \alpha' \otimes 0 = \alpha' \otimes (0 \cdot 0) = 0 \cdot (\alpha' \otimes 0) = 0 \,, \end{aligned}$$

Т. к. разложимые тензоры линейно порождают $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$, этот модуль нулевой.

Вычислим теперь тензорное произведение $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{Z}/(p^m)$ при $n \leqslant m$. Отображение $\mu : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \to \mathbb{Z}/(p^n)$, переводящее пару вычетов $\left([a]_{p^n}, [b]_{p^m}\right)$ в вычет $[ab]_{p^n} = ab \cdot [1]_{p^n}$ билинейно. Покажем, что оно универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \to W$ выполняется равенство $\varphi([a]_{p^n}, [b]_{p^m}) = ab \cdot \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$, из которого вытекает, что линейное отображение $F : \mathbb{Z}/(p^n) \to W$, такое что $\varphi = F \circ \mu$, обязано переводить образующий элемент $[1]_{p^n} \in \mathbb{Z}/(p^n)$ в $\varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$. Таким образом, отображение F единственно, если существует. Единственным соотношением на образующую $e = [1]_{p^n} \in \mathbb{Z}/(p^n)$ является равенство $p^n \cdot e = 0$, и элемент $\varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$ удовлетворяет этому соотношению, т. к. $p^n \cdot \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) = \varphi\left(p^n \cdot [1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) = \varphi\left(0, [1]_{p^m}\right) = 0$. Поэтому правило $[1]_{p^n} \mapsto \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$ корректно определяет отображение $F : \mathbb{Z}/(p^n) \to W$, что доказывает универсальность. Итак, $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{Z}/(p^m) \simeq \mathbb{Z}/\left(p^{\min(n,m)}\right)$.

Упражнение 1.5. Покажите, что $\mathbb{Z} \otimes A \simeq A$ для любой абелевой группы A.

Вычисление тензорных произведений произвольных конечно порождённых абелевых групп сводится к рассмотренным случаям при помощи канонических изоморфизмов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, обсуждаемых ниже.

1.3. Канонические изоморфизмы. Всюду далее речь идёт о произвольных модулях над любым коммутативным кольцом K. Линейные отображения

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to W \tag{1-18}$$

часто хочется задавать указанием значений f на множестве разложимых векторов

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1, v_2, \ldots, v_n)\,, \tag{1-19}$$

а затем по линейности продолжать это правило на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, такое описание однозначно определяет f при условии, что оно корректно: множество разложимых тензоров, как правило, линейно зависимо[1], и все имеющиеся между ними линейные соотношения должны выполняться и между векторами (1-19) в модуле W. Поскольку эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности (1-13), мы приходим к следующему критерию.

Лемма 1.3
Если векторы $f(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в (1-19) полилинейно зависят от векторов v_i (т. е. линейны по каждому v_i при фиксированных остальных), то существует единственное линейное отображение (1-18), действующее на разложимые тензоры по правилу

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Предложение 1.1
Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, переводящий друг в друга разложимые тензоры $u \otimes w$ и $w \otimes u$.

Доказательство. Правило $u \otimes w \mapsto w \otimes u$ билинейно по u, w и по лем. 1.3 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \to W \otimes U$. По тем же причинам существует линейное отображение $W \otimes U \to U \otimes W$, переводящее $w \otimes u$ в $u \otimes w$. Эти два отображения обратны друг другу (поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах, линейно порождающих тензорное произведение), и значит, являются изоморфизмами. □

Предложение 1.2
Имеются канонические изоморфизмы $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$, переводящие друг в друга разложимые тензоры $v \otimes (u \otimes w)$, $v \otimes u \otimes w$ и $(v \otimes u) \otimes w$.

Доказательство. Тензор $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$ трилинейно зависит от (v, u, w). Следовательно, по лем. 1.3 имеется линейное отображение $V \otimes U \otimes W \to V \otimes (U \otimes W)$, переводящее $v \otimes u \otimes w$ в $v \otimes (u \otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v \in V$ тензор $v \otimes u \otimes w$ билинейно зависит от u и w, и значит, по лем. 1.3 мы имеем линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \xrightarrow{u \otimes w \mapsto v \otimes u \otimes w} V \otimes U \otimes W,$$

которое само по себе линейно зависит от v, т. е. тензор $\tau_v(t) = v \otimes t$ билинеен по $v \in V$ и $t \in U \otimes W$. По лем. 1.3 существует линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \to V \otimes U \otimes W,$$

переводящее $v \otimes (u \otimes w)$ в $v \otimes u \otimes w$, что и требовалось. Изоморфизм между $V \otimes U \otimes W$ и $(V \otimes U) \otimes W$ устанавливается аналогично. □

[1]например, если K — бесконечное поле, а V_i — конечномерные пространства, пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ тоже конечномерно, а разложимых тензоров в нём бесконечно много

Предложение 1.3
Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V),$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dotplus w) \leftrightarrows (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dotplus w) \otimes v \leftrightarrows (u \otimes v) \dotplus (w \otimes v)$$

где через $a \dotplus b$ для $a \in A$ и $b \in B$ обозначено сложение элементов $(a, 0)$ и $(0, b)$ в прямой сумме модулей $A \oplus B$.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм — второй получится из него применением предл. 1.1. Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \xrightarrow{v \otimes (u \dotplus w) \mapsto (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)} (V \otimes U) \oplus (V \otimes W)$$

существует, поскольку $(v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)$ билинеен по v и $u \dotplus w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала убеждаемся в наличии линейных отображений

$$\varphi_1 : V \otimes U \to V \otimes (U \oplus W) \quad \text{и} \quad \varphi_2 : V \otimes W \to V \otimes (U \oplus W),$$

действующих на разложимые тензоры по правилам

$$v \otimes u \mapsto v \otimes (u \dotplus 0) \quad \text{и} \quad v \otimes w \mapsto v \otimes (0 \dotplus w),$$

затем комбинируем их в отображение

$$\psi : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \xrightarrow{a \dotplus b \mapsto \varphi_1(a) + \varphi_2(b)} V \otimes (U \oplus W),$$

очевидно, линейное и обратное к построенному в начале доказательства. □

1.4. Тензорное произведение линейных отображений. Рассмотрим конечный набор линейных отображений $f_i : U_i \to W_i$ между произвольными модулями над любым коммутативным кольцом. Поскольку тензор

$$f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n) \in W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$$

полилинеен по $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, правило

$$u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n)$$

корректно задаёт линейное отображение, которое обозначается

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n \to W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$$

и называется *тензорным произведением* отображений $f_i : U_i \to W_i$.

Пример 1.4 (тензорное произведение вложения с тождественным оператором)
Если отображение $f : U \hookrightarrow W$ инъективно, а модуль F свободен, то произведение

$$f \otimes \mathrm{Id}_F : U \otimes F \to W \otimes F \tag{1-20}$$

также инъективно. Это очевидно, когда $F = K \cdot e$ имеет ранг 1: правила $u \otimes (\lambda e) \mapsto \lambda u$ и $w \otimes (\mu e) \mapsto \mu w$ задают изоморфизмы $U \otimes F \xrightarrow{\sim} U$ и $W \otimes F \xrightarrow{\sim} W$, отождествляющие отображение (1-20) с исходным отображением $f : U \hookrightarrow W$. Свободный модуль F большего ранга является прямой суммой свободных модулей ранга 1, и по предл. 1.3 модули $U \otimes F \simeq U^{\oplus \operatorname{rk} F}$ и $W \otimes F \simeq W^{\oplus \operatorname{rk} F}$ суть прямые суммы $\operatorname{rk} F$ одинаковых копий исходных модулей, а отображение (1-20) действует на них по правилу $(v_1, v_2, \dots , v_n) \mapsto \big(f_1(u_1), f_2(u_2), \dots , f_n(u_n)\big)$ и очевидно инъективно.

Если модуль F не свободен, произведение (1-20) может оказаться не инъективным даже когда $f : U \hookrightarrow W$ это вложение свободных модулей. Например, вложение $\mathbb{Z}$-модулей $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ по правилу $z \mapsto 2z$ при тензорном умножении на $\mathbb{Z}/(2)$ превращается в *нулевое* отображение $f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/(2)} : \mathbb{Z}/(2) \to \mathbb{Z}/(2)$, переводящее $[1]_2$ в $[0]_2$.

Упражнение 1.6. Покажите, что сюрьективность отображения $f : U \twoheadrightarrow W$ всегда влечёт за собой сюрьективность отображения $f \otimes \mathrm{Id}_V : U \otimes V \to W \otimes V$ для любых модулей U, V, W над любым коммутативным кольцом K.

Теорема 1.2
Пусть $U \simeq F / R_U$ и $W \simeq G / R_W$, где F и G — свободные модули над произвольным коммутативным кольцом K, а $R_U \subset F$ и $R_W \subset G$ суть подмодули соотношений, определяющих модули U и W. Тогда

$$U \otimes W \simeq \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W},$$

где $R_U \otimes G + F \otimes R_W$ есть линейная оболочка подмодулей $R_U \otimes G$ и $F \otimes R_W$ свободного модуля $F \otimes G$, вложенных в него согласно прим. 1.4.

Доказательство. Сопоставление элементам $f \pmod{R_U} \in F/R_U$ и $g \pmod{R_G} \in G/R_W$ элемента $f \otimes g \pmod{(R_U \otimes G + F \otimes R_W)}$ корректно, поскольку при $u \in R_U$ и $w \in R_W$

$$(f + u) \otimes (g + w) = f \otimes g + (u \otimes g + f \otimes w + u \otimes w) \equiv f \otimes g \pmod{(R_U \otimes G + F \otimes R_W)},$$

и задаёт билинейное отображение

$$\overline{\tau} : U \times W \to \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W}, \tag{1-21}$$

которое включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F \times G \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_U \times \pi_W"'] & F \otimes G \arrow[d, "\pi"] \\ U \times W \arrow[r, "\overline{\tau}"] & \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \end{tikzcd} \tag{1-22}$$

где $\pi_U : F \twoheadrightarrow U$, $\pi_W : G \twoheadrightarrow W$ и $\pi : F \otimes G \twoheadrightarrow (F \otimes G)/(R_U \otimes G + F \otimes R_W)$ означают отображения факторизации, а $\tau : F \times G \to F \otimes G$ — универсальное билинейное отображение. Покажем, что билинейное отображение (1-21) тоже универсально.

Всякое билинейное отображение $\varphi : U \times W \to H$ индуцирует полилинейное отображение $\widehat{\varphi} : F \times G \to H$ по правилу

$$(f, g) \mapsto \varphi\left(f \pmod{R_U}\,,\; g \pmod{R_W} \right)\,, \tag{1-23}$$

а значит, существует линейное отображение $\psi : F \otimes G \to H$, такое что

$$\psi(f \otimes g) = \varphi\left(f \pmod{R_U}\,,\; g \pmod{R_W} \right)\,.$$

Поскольку ψ аннулирует подмодули $R_U \otimes G$ и $F \otimes R_W$, оно корректно спускается до линейного отображения

$$\overline{\psi} : \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \to H\,,$$

такого что $\overline{\psi} \circ \tau = \varphi$. С другой стороны, если линейное отображение

$$\eta : \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \to H$$

тоже удовлетворяет равенству $\eta \circ \tau = \varphi$, то его композиция со стрелками $\overline{\tau}$ и $\pi_U \times \pi_W$ из диаграммы (1-22) задаёт билинейное отображение

$$\eta \circ \overline{\tau} \circ (\pi_U \times \pi_W) : F \times G \to H \tag{1-24}$$

действующее на пару $(f, g) \in F \times G$ в точности по формуле (1-23) и, стало быть, совпадающее равное $\widehat{\psi}$. В силу универсальности τ композиция (1-24) равна $\psi \circ \tau$, откуда в виду коммутативности диаграммы (1-22) вытекает равенство $\eta \circ \pi = \psi$, а с ним и равенство $\eta = \overline{\psi}$. $\square$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Из единственности подъёма полилинейной формы $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to \Bbbk$ до линейной формы $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to \Bbbk$ вытекает, что единственная линейная форма $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to \Bbbk$, обращающая в нуль на всех разложимых тензорах, это нулевая форма. Поэтому разложимые тензоры не содержатся ни в каком собственном подпространстве.

Упр. 1.3. Образ оператора $F : U \to W$ ранга 1 одномерен и натянут на некий ненулевой вектор w, единственный с точностью до пропорциональности. Значение F на произвольном векторе $u \in U$ равно $F(u) = \xi(u) \cdot w$, где $\xi \in U^*$ отличен от нуля и лежит в одномерном подпространстве $\operatorname{Ann} \ker F$.

Упр. 1.4. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как и между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Т. к. всякая прямая, лежащая на квадрике Сегре и проходящая через заданную точку p содержится в конике, которая высекается из квадрики Сегре касательной плоскостью в точке p и полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке p образов координатных прямых с $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упр. 1.5. Модуль билинейных отображений $\mathbb{Z} \times A \to W$ изоморфен $\operatorname{Hom}(A, W)$. Изоморфизм задаётся сопоставлением билинейному отображению φ его ограничения на $1 \times A$.

Упр. 1.6. Достаточно убедиться в том, что все разложимые тензоры $w \otimes v \in W \otimes V$ лежат в образе $f \otimes \operatorname{Id}_V$, а это очевидно.