

### §3. Симметрические функции

**3.1. Симметрические и кососимметрические многочлены.** Симметрическая группа  $S_n$  действует на кольце многочленов  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  переставляя переменные:

$$gf(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \dots, x_{g(n)}) \quad \forall g \in S_n. \quad (3-1)$$

Многочлен  $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  называется *симметрическим*, если  $gf = f$  для всех  $g \in S^n$ , и *кососимметрическим*, если  $g(t) = \text{sgn}(g) \cdot t$  для всех  $g \in S^n$ . Симметрические многочлены образуют в  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  подкольцо, а кососимметрические многочлены — модуль над этим кольцом<sup>1</sup>. (Косо)симметрические многочлены можно иначе воспринимать как (косо)симметричные тензоры в  $n$ -той тензорной степени  $\mathbb{k}[t]^{\otimes n}$  кольца многочленов  $\mathbb{k}[t]$  от одной переменной: изоморфизм  $\mathbb{Z}$ -модулей

$$\kappa : \mathbb{Z}[t]^{\otimes n} \simeq \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad t^{m_1} \otimes t^{m_2} \otimes \dots \otimes t^{m_n} \mapsto x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \quad (3-2)$$

(номера тензорных сомножителей слева соответствуют номерам переменных справа) перестановочен с действием  $S_n$  и отождествляет (косо)симметричные тензоры слева с (косо)симметрическими многочленами справа. Умножению многочленов в кольце  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  отвечает при этом покомпонентное умножение

$$(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n) \cdot (g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n) = (f_1 g_1) \otimes (f_2 g_2) \otimes \dots \otimes (f_n g_n).$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Проверьте, что так определённое умножение наделяет  $\mathbb{Z}[t]^{\otimes n}$  структурой коммутативного кольца с единицей  $1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ .

Изоморфизм (3-2) переводит описанные в формулах (2-22) и (2-23) на 23 стандартные базисы  $\mathbb{Z}$ -модулей  $\text{Sym}^n(\mathbb{Z}[t])$  и  $\text{Skew}^n(\mathbb{Z}[t])$  в стандартные базисы  $\mathbb{Z}$ -модулей симметрических и кососимметрических многочленов, которые называются *мономиальным* и *детерминантным*.

**3.1.1. Мономиальный базис** модуля симметрических многочленов состоит из *мономиальных симметрических многочленов*

$$m_\lambda = (\text{сумма всех мономов из } S_n\text{-орбиты монома } x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}), \quad (3-3)$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  пробегает диаграммы Юнга из  $\leq n$  строк. Поскольку любой симметрический многочлен вместе с каждым своим мономом содержит (с одинаковыми коэффициентами) все мономы из его  $S_n$ -орбиты, и каждая  $S_n$ -орбита однозначно определяется своим лексикографически старшим мономом, показатели которого слева направо не убывают, любой симметрический многочлен однозначно представляется в виде целочисленной линейной комбинации многочленов  $m_\lambda$ . Прообразом многочлена  $m_\lambda$  при изоморфизме (3-2) является стандартный базисный симметрический тензор (2-22), равный сумме всех различных тензорных произведений из  $m_0(\lambda)$  сомножителей  $t^0 = 1$ ,  $m_1(\lambda)$  сомножителей  $t^1$ ,  $m_2(\lambda)$  сомножителей  $t^2$  и т. д., где  $m_i(\lambda)$  равно числу строк длины  $i$  в диаграмме  $\lambda$ .

<sup>1</sup>т. к. произведение симметрического многочлена на кососимметрический — это кососимметрический многочлен

**3.1.2. Детерминантный базис** модуля кососимметрических многочленов состоит из альтернированных  $S_n$ -орбит

$$\Delta_\nu = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \cdots x_{g(n)}^{\nu_n}. \quad (3-4)$$

Поскольку в кососимметрическом многочлене нет мономов, содержащих одинаковые степени разных переменных<sup>1</sup>, индекс  $\nu$  в (3-4) пробегает множество диаграмм Юнга с неповторяющимися длинами строк  $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n$ . Такая диаграмма  $\nu$  всегда содержит в себе минимальную треугольную диаграмму  $\delta$  из  $n$  строк разной длины

$$\delta = ((n-1), (n-2), \dots, 1, 0).$$

Разность  $\lambda = \nu - \delta = ((\nu_1 - n + 1), (\nu_2 - n + 2), \dots, (\nu_{n-1} - 1), \nu_n)$  имеет  $\lambda_i = \nu_i - n + i$  и представляет собою уже произвольную диаграмму Юнга из  $\leq n$  строк без ограничений на их длины. Иногда бывает удобно нумеровать базис (3-4) именно такими диаграммами  $\lambda$ , и в этих случаях мы будем писать  $\Delta_{\lambda+\delta}$  вместо  $\Delta_\nu$ .

Легко видеть, что многочлен (3-4) представляет собою определитель<sup>2</sup>

$$\Delta_\nu = \det(x_j^{\nu_i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Убедитесь в этом прямым раскрытием правой части (3-5).

В частности, при  $\nu = \delta$  получаем *определитель Вандермонда*

$$\Delta_\delta = \det(x_j^{n-i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (x_i - x_j). \quad (3-6)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Убедитесь в справедливости равенства  $\Delta_\delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ .

**3.1.3. Базис Шура.** Поскольку любой кососимметрический многочлен  $f$  обращается в нуль при подстановке  $x_i = x_j$ , он делится в кольце  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  на  $(x_i - x_j)$ , а так как каждая из разностей  $(x_i - x_j)$  неприводима,  $f$  делится на их произведение  $\Delta_\delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ , и частное  $f/\Delta_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  является симметрическим многочленом. Мы получаем

<sup>1</sup>при транспозиции любых двух переменных многочлен должен менять знак

<sup>2</sup>здесь и далее запись  $(f(i, j))$ , где  $f(i, j)$  некоторая функция от  $i, j$ , будет означать матрицу, в  $i$ -той строке и  $j$ -том столбце которой стоит результат применения функции  $f$  к данным значениям  $i$  и  $j$

## Предложение 3.1

Умножение на определитель Вандермонда  $\Delta_\delta$  задаёт биекцию между симметричными и кососимметричными многочленами. Эта биекция является изоморфизмом модулей над кольцом симметрических многочленов (и  $\mathbb{Z}$ -модулей).  $\square$

## Следствие 3.1

Многочлены<sup>1</sup>  $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$ , где  $\lambda$  пробегает все диаграммы Юнга из не более  $n$  строк, образуют базис  $\mathbb{Z}$ -модуля симметрических многочленов.

**3.2. Элементарные симметрические многочлены.** Лежащие в кольце  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  коэффициенты многочлена

$$E(t) = \prod_i (1 + x_i t) = \sum_{k=0}^n e_k(x) \cdot t^k \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n][t] \quad (3-7)$$

называются *элементарными симметрическими многочленами*. Раскрывая скобки, получаем  $e_0 = 1$  и

$$e_k(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad (3-8)$$

(сумма всех произведений из  $k$  различных переменных, где  $k \geq 1$ ). Эти же многочлены возникают в *формулах Виета*: если  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  являются корнями приведённого многочлена

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i), \quad (3-9)$$

то  $a_i = (-1)^i e_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

**3.2.1. Разложение по мономиальному базису.** Для любого набора неотрицательных целых чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  положим

$$e_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_m} = \prod_{k=1}^m e_{\lambda_k}.$$

Если  $\lambda$  — диаграмма Юнга, а  $\lambda^t$  получена из неё транспонированием, то лексикографически старший мономом многочлена  $e_\lambda$  равен  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$  и возникает при перемножении монома  $x_1 \dots x_{\lambda_1}$  из  $e_{\lambda_1}$ , монома  $x_1 \dots x_{\lambda_2}$  из  $e_{\lambda_2}$  и т. д. вплоть до  $x_1 \dots x_{\lambda_m}$  из  $e_{\lambda_m}$ . Это продуктивно представлять себе как результат перемножения букв  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , расставленных в клетки диаграммы  $\lambda$  так, что  $x_1$  стоит во всех клетках первого столбца,  $x_2$  — во всех клетках второго и т. д. В результате показатель у переменной  $x_i$  будет равен длине  $i$ -того столбца диаграммы  $\lambda$ , т. е. длине  $i$ -той строки *транспонированной*<sup>2</sup> диаграммы  $\lambda^t$ .

<sup>1</sup>многочлены  $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$  называются (*детерминантными*) *многочленами Шура*

<sup>2</sup>диаграммы Юнга, получающиеся друг из друга отражением относительно главной диагонали (как при транспонировании матрицы) называются *сопряжёнными* или *транспонированными*

Итак, разложение многочлена  $e_\lambda$  по базису  $m_\lambda$  из мономиальных симметрических многочленов (3-3) имеет вид:

$$e_\lambda = m_{\lambda^t} + (\text{лексикографически младшие члены}) \quad (3-10)$$

**Предложение 3.2**

Многочлены  $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_m}$ , где  $\lambda$  пробегает диаграммы Юнга, содержащие не более  $n$  столбцов, образуют базис  $\mathbb{Z}$ -модуля симметрических функций.

**Доказательство.** Многочлены  $e_\lambda$  нумеруются диаграммами  $\lambda$  из не более  $n$  столбцов, элементы мономиального базиса  $m_\mu$  модуля симметрических функций — диаграммами из не более  $n$  строк. Выпишем векторы  $m_\mu$  в строку в порядке лексикографического возрастания диаграмм  $\mu$ , а векторы  $e_\lambda$  — в порядке лексикографического возрастания транспонированных диаграмм  $\lambda^t$ . Формула (3-10) утверждает теперь, что матрица координат векторов  $e_\lambda$  в мономиальном базисе  $m_\lambda$  верхнетреугольная с единицами по главной диагонали. Поскольку такая целочисленная матрица обратима над  $\mathbb{Z}$ , многочлены  $e_\lambda$  также образуют базис.  $\square$

**Следствие 3.2**

Многочлены  $e_1, e_2, \dots, e_n$  алгебраически независимы в  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  и любой симметрический многочлен однозначно записывается в виде многочлена от  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Иначе говоря, кольцо симметрических функций совпадает с  $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots, e_n]$ , канонически вложенным в  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  в качестве наименьшего подкольца, содержащего все  $e_i$ .

**Доказательство.** Переписывая многочлен  $e_\lambda$  как  $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$ , где  $m_i$  — это число строк длины  $i$  в диаграмме  $\lambda$ , видим, что множество многочленов  $e_\lambda$  — это в точности множество всех различных мономов от  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .  $\square$

**Следствие 3.3**

Всякий симметрический многочлен от корней  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  приведённого многочлена (3-9) является многочленом от его коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , а всякая симметрическая рациональная функция от корней произвольного (не обязательно приведённого) многочлена является рациональной функцией от его коэффициентов.  $\square$

**3.3. Полные симметрические многочлены.** Обозначим через  $h_k(x) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  сумму всех мономов степени  $k$ . Многочлен  $h_k$  называется *полным симметрическим многочленом* степени  $k$ . Он равен коэффициенту при  $t^k$  у формального степенного ряда  $H(t) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n][[t]]$ , возникающего при перемножении  $n$  бесконечных геометрических прогрессий<sup>1</sup>

$$H(t) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \prod_i (1 + x_i t + x_i^2 t^2 + x_i^3 t^3 + \cdots) = \sum_{k \geq 0} h_k(x) \cdot t^k. \quad (3-11)$$

<sup>1</sup>беря в  $i$ -той скобке  $m_i$ -тое слагаемое и перемножая их между собой, получаем  $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$

Поэтому  $H(t)E(-t) = 1$ . Вычисляя в этом равенстве коэффициент при  $t^k$  получаем рекурсивные формулы, выражающие  $e_i$  и  $h_i$  друг через друга:

$$(-1)^k h_k = e_k - e_{k-1} h_1 + e_{k-2} h_2 - \dots + (-1)^{k-1} e_1 h_{k-1} \quad (3-12)$$

$$(-1)^k e_k = h_k - h_{k-1} e_1 + h_{k-2} e_2 - \dots + (-1)^{k-1} h_1 e_{k-1}. \quad (3-13)$$

**Предложение 3.3**

Отображение  $\omega$ , переводящее многочлен  $e_k$  в многочлен  $h_k$  (при  $k = 1, \dots, n$ ) является инволютивным автоморфизмом кольца симметрических многочленов.

**Доказательство.** Так как кольцо симметрических функций изоморфно кольцу многочленов от  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , отображение  $e_k \mapsto h_k$  однозначно продолжается до гомоморфизма  $\omega$  из кольца симметрических функций в себя. Из рекурсивных формул (3-12) и (3-13) вытекает, что этот гомоморфизм переводит  $h_k$  обратно в  $e_k$ , т. е. является инволюцией и, как следствие, автоморфизмом.  $\square$

**Следствие 3.4**

Многочлены  $h_1, h_2, \dots, h_n$  алгебраически независимы в  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  и любой симметрический многочлен (в том числе  $h_m$  с  $m > n$ ) однозначно записывается в виде многочлена от  $h_1, h_2, \dots, h_n$ .

**3.4. Степенные суммы Ньютона.** Сумма  $k$ -тых степеней всех переменных

$$p_k(x) = \sum_i x_i^k \quad (3-14)$$

называется  $k$ -тым симметрическим многочленом Ньютона. Многочлены  $p_k(x)$  с  $k \geq 1$  удобно воспринимать как коэффициенты ряда

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k \geq 1} p_k(x) \cdot t^{k-1} = \sum_i \sum_{k \geq 1} x_i^k \cdot t^{k-1} = \sum_i \frac{d}{dt} \sum_{k \geq 1} x_i^k \cdot \frac{t^k}{k} = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_i \ln(1 - x_i \cdot t) = \frac{d}{dt} \ln \prod_i \frac{1}{1 - x_i \cdot t} = \frac{d}{dt} \ln H(t) \end{aligned} \quad (3-15)$$

который является логарифмической производной от ряда  $H(t) = 1/E(-t)$ . Таким образом,

$$P(t) = H'(t)/H(t) = E'(-t)/E(-t).$$

Сравнивая коэффициенты при  $t^{k-1}$  в равенствах

$$H(t)P(t) = H'(t) \quad \text{и} \quad E(-t)P(t) = E'(-t),$$

получаем рекурсивные формулы Ньютона для выражения  $p_k$  через  $h_k$  и  $e_k$  соответственно:

$$p_k = kh_k - h_{k-1}p_1 - h_{k-2}p_2 - \dots - h_1p_{k-1} \quad (3-16)$$

$$(-1)^{k-1}p_k = ke_k - e_{k-1}p_1 + e_{k-2}p_2 - \dots + (-1)^{k-1}e_1p_{k-1}. \quad (3-17)$$

Индукция по  $k$  показывает, что многочлен  $p_k$  является собственным вектором инволюции  $\omega$  из предл. 3.3 с собственным значением  $(-1)^{k-1}$ :

$$\omega(p_k) = (-1)^{k-1} p_k. \quad (3-18)$$

Следствие 3.5

Многочлены  $p_1, p_2, \dots, p_n$  алгебраически независимы в  $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  и любой симметрический многочлен с рациональными коэффициентами (в том числе  $p_m$  с  $m > n$ ) однозначно записывается в виде многочлена с рациональными коэффициентами от  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Доказательство. Из формулы (3-17) вытекает, что в пространстве многочленов с рациональными коэффициентами от  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , степень которых не превышает  $N$ , где  $N \in \mathbb{N}$  — любое,  $\mathbb{Q}$ -линейные оболочки всевозможных мономов  $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$  от  $p_1, p_2, \dots, p_n$  и всевозможных мономов  $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_n^{m_n}$  от  $e_1, e_2, \dots, e_n$  совпадают. Поскольку количества этих мономов при фиксированном  $N$  одинаковы, и по сл. 3.4 мономы  $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_n^{m_n}$  линейно независимы, мономы  $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$  также линейно независимы.  $\square$

**3.4.1. Явное выражение  $e_k$  и  $h_k$  через  $p_k$ .** Для любого конечного набора невозрастающих неотрицательных целых чисел  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , состоящего из  $m_1$  единиц,  $m_2$  двоек,  $m_3$  троек и т. д. положим<sup>1</sup>  $m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (m_1, m_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{|\lambda|}$  и

$$\begin{aligned} p_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} p_{\lambda_3} \dots = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \dots \\ \varepsilon_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\sum (k-1)m_k} = (-1)^{|\lambda|} (-1)^{\sum m_k} = (-1)^{\sum (\lambda_i - 1)} \\ z_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_k (m_k! \cdot k^{m_k}). \end{aligned} \quad (3-19)$$

а также условимся в дальнейшем не различать между собою наборы  $\lambda$ , получающиеся друг из друга приписыванием справа любого количества нулей. Множество многочленов вида  $p_\lambda$  это в точности множество всевозможных мономов от  $p_i$ . Переход от нумерации мономов диаграммами Юнга к их обычному представлению при помощи набора показателей степеней это переход от невозрастающей последовательности  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  длин строк диаграммы к целочисленному вектору  $m(\lambda)$ ,  $i$ -тая компонента которого равна количеству строк длины  $i$  в  $\lambda$ . В частности, все многочлены  $p_\lambda$  являются собственными векторами инволюции  $\omega$ :

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda \cdot p_\lambda. \quad (3-20)$$

**Упражнение 3.4.** Покажите, что для любой диаграммы Юнга  $\lambda$  число  $z_\lambda$  равно количеству перестановок в симметрической группе  $S_{|\lambda|}$ , коммутирующих с произвольным образом фиксированной перестановкой циклового типа  $\lambda$ , и что всего в  $S_{|\lambda|}$  имеется  $|\lambda|! / z_\lambda$  перестановок циклового типа  $\lambda$ .

<sup>1</sup>отметим, что  $\sum_k k \cdot m_k = |\lambda|$

Предложение 3.4

Многочлены  $e_k$  и  $h_k$  выражаются через  $\mathbb{Q}$ -базис  $p_\lambda$  по формулам:

$$h_k = \sum_{|\lambda|=k} z_\lambda^{-1} p_\lambda \quad (3-21)$$

$$e_k = \sum_{|\lambda|=k} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda \quad (3-22)$$

(суммирование по всем  $k$ -клеточным диаграммам Юнга).

Доказательство. Достаточно доказать формулу (3-21), формула (3-22) получается из неё применением инволюции  $\omega$  из предл. 3.3. Согласно (3-15)

$$H(t) = e^{\int P(t) dt} = e^{\sum p_i t^i/i} = \prod e^{p_i t^i/i} = \prod_{i \geq 1} \sum_{m \geq 0} \frac{p_i^m}{i^m m!} t^{im}.$$

Коэффициент при  $t^k$  в правой части возникает при выборе в  $i$ -той перемножаемой скобке  $m_i$ -того слагаемого так, чтобы  $\sum_i i \cdot m_i = k$ . Такие выборы биективно соответствуют диаграммам Юнга  $\lambda$  веса  $k$ , имеющих  $m_1$  строк длины 1,  $m_2$  строк длины 2 и т. д., а произведение слагаемых, отвечающих такому выбору, равно  $p_\lambda / z_\lambda$ .  $\square$

**3.5. Формула Джамбелли** выражает детерминантные многочленами Шура  $s_\lambda$  через полные симметрические многочлены  $h_k$  в кольце  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Для её получения обозначим через  $e_k^{(p)}(x)$  результат подстановки в  $e_k(x)$  значения  $x_p = 0$ . Таким образом,  $e_k^{(p)}$  — это элементарная симметрическая функция от  $(n - 1)$  переменных

$$(x_1, \dots, \hat{x}_p, \dots, x_n),$$

где «крышка» означает пропуск переменной  $x_p$ . Производящая функция для многочленов  $e_k^{(p)}$  с фиксированным  $p$  имеет вид

$$E^{(p)}(t) = \sum_k e_k^{(p)}(x) \cdot t^k = \prod_{i \neq p} (1 + x_i t).$$

Поэтому  $H(t)E^{(p)}(-t) = (1 - x_p t)^{-1}$ . Сравнивая коэффициенты при  $t^k$  в обеих частях, получаем соотношение

$$h_0 \cdot (-1)^k e_k^{(p)} + h_1 \cdot (-1)^{k-1} e_{k-1}^{(p)} + \dots + h_k \cdot e_0^{(p)} = x_p^k,$$

справедливое для всех целых неотрицательных  $k$ , если положить  $e_j^{(p)} = 0$  при  $j > n - 1$ . С учётом этого замечания предыдущую формулу можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_p^k &= h_{k-n+1} \cdot (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} + h_{k-n+2} \cdot (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(p)} + \dots + h_k \cdot e_0^{(p)} = \\ &= \sum_{j=1}^n h_{k-n+j} \cdot (-1)^{n-j} e_j^{(p)}. \end{aligned} \quad (3-23)$$

и воспринимать как произведение строки  $(h_{k-n+1}, h_{k-n+2}, \dots, h_k)$  длины  $n$  на столбец

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} \\ \vdots \\ e_2^{(p)} \\ -e_1^{(p)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

высоты  $n$ . Если организовать  $h$ -строки, отвечающие каким-нибудь  $n$  фиксированным строго убывающим значениям  $k = v_1, v_2, \dots, v_n, v_1 > v_2 > \dots > v_n$ , в матрицу<sup>1</sup>

$$H_\nu = (h_{v_i-n+j}) = \begin{pmatrix} h_{v_1-n+1} & h_{v_1-n+2} & \dots & h_{v_1} \\ h_{v_2-n+1} & h_{v_2-n+2} & \dots & h_{v_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{v_n-n+1} & h_{v_n-n+2} & \dots & h_{v_n} \end{pmatrix}$$

а  $e$ -столбцы, отвечающие  $n$  различным значениям  $p = 1, 2, \dots, n$ , — в матрицу

$$M = \left( (-1)^{n-i} e_{n-i}^{(j)} \right) = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(1)} & (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(2)} & \dots & (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(n)} \\ (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(1)} & (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(2)} & \dots & (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

то формула (3-23) превратится в матричное равенство  $D_\nu = H_\nu \cdot M$ , где

$$D_\nu = (x_j^{v_i}) = \begin{pmatrix} x_1^{v_1} & x_2^{v_1} & \dots & x_n^{v_1} \\ x_1^{v_2} & x_2^{v_2} & \dots & x_n^{v_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{v_n} & x_2^{v_n} & \dots & x_n^{v_n} \end{pmatrix}$$

Таким образом, для любой диаграммы Юнга  $\nu$  со строго убывающими длинами строк

$$\Delta_\nu = \det D_\nu = \det H_\nu \cdot \det M.$$

При  $\nu = \delta$  матрица  $H_\delta$  верхняя унитреугольная. Поэтому  $\det H_\delta = 1$  и

$$\det M = \det D_\delta = \Delta_\delta.$$

Мы получаем искомое выражение полиномов Шура через полные симметрические функции:

$$s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda} / \Delta_\delta = \det D_{\delta+\lambda} / \det M = \det H_{\delta+\lambda} = \det (h_{\lambda_i+j-i}) \quad (3-24)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5 (ФОРМУЛА ДЖАМБЕЛЛИ)

$$s_\lambda = \det \begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \dots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & h_{\lambda_{n-1}+1} \\ h_{\lambda_n-n+1} & \dots & h_{\lambda_n-1} & h_{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (3-25)$$

где по главной диагонали матрицы стоят  $h_{\lambda_1}, h_{\lambda_2}, \dots, h_{\lambda_n}$ , и при движении вдоль её строк слева направо индексы у  $h$  с каждым шагом увеличиваются на единицу.  $\square$

<sup>1</sup>в которой мы полагаем  $h_0 = 1$  и  $h_j = 0$  при  $j < 0$



**3.5.1. Примеры.** При  $n = 2$  в  $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$  получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} = h_1 h_2 - h_3 = e_1 e_2 - e_3.$$

При  $n = 3$  в  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$  получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = s_{(2,1,0)} = \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix}$$

что приводит к тому же самому выражению  $s_{(2,1)}$  через  $h_i$ , что и при  $n = 2$ .

**Упражнение 3.5.** Убедитесь, что выражение  $s_\lambda$  через  $h_k$ , полученное при числе переменных  $n$ , равном высоте диаграммы  $\lambda$ , сохраняется и при любом большем числе переменных.

Беря  $\lambda = (k)$ , т. е. одну строку длины  $k$ , получаем равенство  $s_{(k)} = h_k$ , очевидное при  $n = 1$  и по [упр. 3.5](#) справедливое для всех  $n$ . Отметим, что при непосредственном вычислении определителей  $\Delta_{\delta+(n)}$  и  $\Delta_\delta$  произвольного размера  $n \times n$  равенство  $\Delta_{\delta+(n)} = h_k \cdot \Delta_\delta$  не вполне очевидно.

**3.6. Формула Пьери** выражает произведение  $s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)}$  через многочлены  $s_\mu$ . Для её вывода нам придётся слегка обобщить сказанное в [н° 3.1](#). Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов  $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ , а в нём — симметрические и кососимметрические ряды (первые образуют подкольцо, вторые — модуль над этим подкольцом). То же рассуждение, что и в [н° 3.1.2](#) показывает, что всякий кососимметричный ряд  $A$  однозначно записывается в виде бесконечной целочисленной линейной комбинации альтернированных  $S_n$ -орбит мономов

$$A = \sum_{v_1 > v_2 > \dots > v_n} c_v \cdot \Delta_v \quad (3-26)$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  из  $n$  строк строго убывающей длины, коэффициенты  $c_v \in \mathbb{Z}$ , и

$$\Delta_v = \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) x_{g(1)}^{v_1} x_{g(2)}^{v_2} \dots x_{g(n)}^{v_n}.$$

**ЛЕММА 3.1**

Разложение (3-26) для произведения базисного кососимметрического многочлена  $\Delta_v$  на симметрический ряд

$$H(x) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i)^{-1} = \prod_{i=1}^n (1 + x_i + x_i^2 + x_i^3 + \dots) = \sum_{k \geq 0} h_k(x)$$

имеет вид  $\Delta_v \cdot \sum_{\eta} \Delta_\eta$ , где суммирование идёт по всем  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  с

$$\eta_1 \geq v_1 > \eta_2 \geq v_2 > \dots \eta_n \geq v_n.$$

Доказательство. Для любых  $n$  рядов  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$  положим

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) f_1(x_{g(1)}) f_2(x_{g(2)}) \dots f_n(x_{g(n)}) .$$

Ряд  $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \in \mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$  кососимметричен и полилинейно и кососимметрично зависит от  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . В частности,  $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n$  не изменяется при добавлении к любому из рядов любой линейной комбинации остальных.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Убедитесь, что  $t^{v_1} \wedge t^{v_2} \wedge \dots \wedge t^{v_n} = \Delta_v$ .

В этих обозначениях

$$\Delta_v \cdot H = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \prod_{i=1}^n x_{g(i)}^{v_i} (1 - x_{g(i)})^{-1} = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n ,$$

где  $f_i(t) = x^{v_i}(1 - x_i t)^{-1} = t^{v_i} + t^{v_i+1} + t^{v_i+2} + \dots$ . Вычитая  $f_1$  из всех остальных рядов, мы обрезаем их до многочленов степени  $< v_1$ . Вычитая второй из тих многочленов из всех последующих, мы обрезаем последние до многочленов степени  $< v_2$ . Действуя в таком духе, приходим к равенству  $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n = \bar{f}_1 \wedge \bar{f}_2 \wedge \dots \wedge \bar{f}_n$ , в котором  $\bar{f}_1 = f_1 = \sum_{j \geq v_1} t^j$  и  $\bar{f}_i = t^{v_i} + t^{v_i+1} + \dots + t^{v_{i-1}-1}$  при  $2 \leq i \leq n$ . В силу полилинейности

$\wedge$ -произведения  $\bar{f}_1 \wedge \bar{f}_2 \wedge \dots \wedge \bar{f}_n = \sum_{\eta} t^{\eta_1} \wedge t^{\eta_2} \wedge \dots \wedge t^{\eta_n} = \sum_{\eta} \Delta_{\eta}$ , где суммирование идёт по всем  $\eta_1 \geq v_1 > \eta_2 \geq v_2 > \eta_3 \geq v_3 > \dots \eta_n \geq v_n$ .  $\square$

Следствие 3.6 (формула Пьери)

$$s_{\lambda} \cdot h_k = \sum_{\mu} s_{\mu} ,$$

где суммирование происходит по всем диаграммам  $\mu$  из  $\leq n$  строк, которые можно получить, добавляя к диаграмме  $\lambda$  ровно  $k$  клеток так, чтобы никакие две из них не попали в один столбец.

Доказательство. По лем. 3.1 имеем равенство  $\Delta_{\delta+\lambda} \sum_{k \geq 0} h_k = \sum_{\tau} \Delta_{\delta+\mu}$ , где суммирование происходит по всем диаграммам  $\mu$ , таким что<sup>1</sup>  $\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \lambda_2 \geq \dots$ . Деля обе части на  $\Delta_{\delta}$  и беря в полученном равенстве однородную компоненту степени  $|\lambda| + k$  по  $x$ , получаем требуемую формулу.  $\square$

Замечание 3.1. Если диаграмма  $\lambda$  состоит из  $k < n$  строк, что отвечает значениям  $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0$ , диаграммы  $\mu$  в формуле Пьери могут содержать на одну строку больше, чем в диаграмме  $\lambda$ . Например, при  $n = 2$  получаем

$$s_{(2)} \cdot h_1 = s_{(2,1)} + s_{(3)} ,$$

что вновь приводит нас к выражению  $s_{(2,1)} = h_2 h_1 - h_3$  из н° 3.5.1 на стр. 39.

<sup>1</sup>напомним (см. н° 3.1.2), что  $\lambda_i = v_i - n + i$ ,  $\mu_i = \eta_i - n + i$ , поэтому неравенства  $\eta_i \geq v_i > \eta_{i+1}$  равносильны неравенствам  $\mu_i \geq \lambda_i \geq \mu_{i+1}$

**3.7. Кольцо симметрических функций.** Удобно думать про симметрические многочлены не привязываясь к конкретному числу переменных, но считая, что их достаточно много для того, чтобы все участвующие в рассуждении функции были определены. Формализуется это так. Условимся не различать между собою две диаграммы  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ , а также два набора показателей  $m'$ ,  $m''$ , если они получаются друг из друга дописыванием справа любого числа нулей. Для каждого набора занумерованных натуральными числами букв  $q_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , положим

$$q_\lambda = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} q_{\lambda_3} \cdots \quad \text{и} \quad q^m = q_1^{m_1} q_2^{m_2} q_3^{m_3} \cdots .$$

Запись  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots)$  всегда будет означать, что  $\lambda$  содержит  $m_i$  строк длины  $i$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ . Это происходит тогда и только тогда, когда  $q_\lambda = q^m$ . Наконец, положим  $m_\lambda = s_\lambda = 0$  всякий раз, когда число переменных меньше количества строк в диаграмме  $\lambda$ , и  $e_\lambda = 0$ , когда число переменных меньше количества столбцов в диаграмме  $\lambda$ . При таких соглашениях каждый из симметрических многочленов  $m_\lambda(x)$ ,  $s_\lambda(x)$ ,  $e_\lambda(x)$ ,  $h_\lambda(x)$  и  $p_\lambda(x)$  становится определённым для переменной  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$  любой размерности  $r$ , причём при  $r > s$  подстановка

$$x_{s+1} = x_{s+2} = \cdots = x_r = 0 \tag{3-27}$$

превращает каждый из этих многочленов в одноимённый многочлен от меньшего набора переменных  $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ . Подстановка (3-27) задаёт сюръективный гомоморфизм колец

$$\zeta_{sr} : \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_r] \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_s]. \tag{3-28}$$

Будем называть последовательность симметрических многочленов

$$f^{(n)} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

(по одному многочлену для каждого числа переменных  $n \in \mathbb{N}$ ) *симметрической функцией степени  $d$*  и обозначать такую функцию просто через  $f$ , если выполняются два условия:

- при всех  $n$  многочлен  $f^{(n)}$  однороден степени  $d$
- $\zeta_{rs}(f^{(r)}) = f^{(s)}$  при любых  $r > s$

При этом запись  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  по определению означает  $f^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , но поскольку верхний индекс у  $f$  равен числу подставляемых переменных, писать его нет смысла. Например, для фиксированной диаграммы  $\lambda$  веса  $|\lambda| = d$  последовательность мономиальных многочленов  $m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , образует симметрическую функцию степени  $d$ , которая обозначается  $m_\lambda$ . Скажем, кубическая симметрическая функция  $m_{(2,1)}$  на наборах из одной, двух и трёх переменных имеет вид

$$\begin{aligned} m_{(2,1)}(x_1) &= 0 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются и симметрические функции  $s_\lambda$ ,  $e_\lambda$ ,  $h_\lambda$  и  $p_\lambda$  степени  $|\lambda|$ .

Симметрические функции степени  $d$  образуют  $\mathbb{Z}$ -модуль. Его принято обозначать  $\Lambda_d$ . Из сказанного в предыдущих разделах вытекает, что симметрические функции  $m_\lambda$ ,  $s_\lambda$ ,  $e_\lambda$  и  $h_\lambda$ , занумерованные всевозможными диаграммами Юнга веса  $|\lambda| = d$ , являются базисами в  $\Lambda_d$ , а симметрические функции  $p_\lambda$  составляют базис векторного пространства  $\mathbb{Q} \otimes \Lambda_d$  симметрических функций с рациональными коэффициентами. Таким образом,  $\Lambda_d$  является свободным модулем *конечного* ранга, равного количеству диаграмм Юнга веса  $d$ . Это количество принято обозначать  $p(d)$  и называть *числом разбиений* натурального числа  $d$ .

Поскольку произведение симметрических функций степеней  $d_1$  и  $d_2$  является симметрической функцией степени  $d_1 d_2$ , прямая сумма

$$\Lambda = \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda_d$$

представляет собою градуированное кольцо. Оно называется *кольцом симметрических функций*. Все доказанные выше соотношения между функциями  $m_\lambda$ ,  $s_\lambda$ ,  $e_\lambda$ ,  $h_\lambda$  и рекурсивные выражения  $p_i$  через  $e_j$  и  $h_j$  являются тождествами в кольце  $\Lambda$ , а выражения  $h_i$  и  $e_i$  через  $p_\lambda$  — тождествами в кольце  $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$  симметрических функций с рациональными коэффициентами.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.3. Поскольку  $\Delta_\delta$  обращается в нуль при подстановке  $x_i = x_j$ , он делится в кольце  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  на  $(x_i - x_j)$ . Так как каждая из разностей  $(x_i - x_j)$  неприводима,  $f$  делится на  $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$ . Сравнивая лексикографически старшие мономы в этом произведении и в  $\Delta_\delta$ , заключаем, что частное равно 1.

Упр. 3.4. Разложим перестановку  $g$  циклового типа  $\lambda$  в произведение независимых циклов и запишем их по строкам диаграммы так, чтобы действие перестановки  $g$  циклически сдвигало все элементы вдоль строк на единицу влево. Сопряжение перестановки  $g$  перестановкой  $h$  состоит в замене содержимого клеток диаграммы по правилу  $i \mapsto h(i)$ . Стабилизатор  $g$  состоит из всех перестановок, независимо циклически сдвигающих номера вдоль строк и переставляющих строки одинаковой длины между собой как единое целое.

Упр. 3.5. В правом нижнем углу матрицы  $(h_{\lambda_i+j-i})$ , начиная с позиции  $(m+1, m+1)$ , где  $m$  — высота диаграммы  $\lambda$ , будет стоять верхняя унитреугольная матрица, левее которой все элементы в строках будут нулевыми.