

§4. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

4.1. Массивы и элементарные операции над ними. Зафиксируем два конечных упорядоченных множества из n и m элементов:

$$I = \{1, 2, \dots, n\}, \quad J = \{1, 2, \dots, m\} \quad (4-1)$$

и будем рассматривать прямоугольные таблицы из n столбцов и m строк, занумерованных элементами I и J соответственно. Таковую таблицу a мы будем называть *массивом* и размещать в *первом* квадранте декартовой системы координат так, чтобы элементы из I росли слева направо по горизонтальной оси, а элементы из J росли снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое $a(i, j)$ клетки с координатами (i, j) у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое стоит воспринимать как «количество» или «массу». Весь массив удобно представлять себе как набор шариков одинаковой массы, наделенных двумя группами признаков и в соответствии с этим разложенных по ячейкам массива. Мы никогда не будем вычислять с числами $a(i, j)$, но будем переключать шарики из ячейки в ячейку, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп.

С массивом a связан *столбцовый вес* (или *I -вес*)

$$w^I = \left(\sum_j a(1, j), \sum_j a(2, j), \dots, \sum_j a(n, j) \right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \quad (4-2)$$

представляющий собой n -мерный целочисленный вектор, i -тая координата которого равна общему количеству шариков в i -том столбце. Аналогично определяется *строчный вес* (или *J -вес*)

$$w^J = \left(\sum_i a(i, 1), \sum_i a(i, 2), \dots, \sum_i a(i, m) \right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m. \quad (4-3)$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали $i = j$:

$$a \mapsto a^t : a^t(i, j) = a(j, i). \quad (4-4)$$

На множестве \mathcal{M} всех массивов действуют четыре набора *элементарных операций*

$$D_j, \quad U_j, \quad L_i, \quad R_i, \quad \text{где } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-1.$$

При применении любой из этих операций к данному массиву $a \in \mathcal{M}$ массив a либо никак не меняется, либо ровно один его шарик перемещается ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right) в соответствии с обозначением для операции.

4.1.1. Вертикальные операции D_j и U_j перемещают шар по вертикали в пределах соседних j -той и $(j+1)$ -ой строки. Чтобы узнать, какой именно шар следует передвинуть (или убедиться в том, что такого шара нет), следует вначале установить между j -той и $(j+1)$ -ой строкой *устойчивое паросочетание*¹. Делается это следующим образом.

¹по-английски: *stable matching*

Будем последовательно перебирать шарики в $(j + 1)$ -ой строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в j -той строке, либо объявлять свободными. Пусть очередной шарик u лежит в клетке $(i, j + 1)$. Его партнёром называем самый правый шар из тех, что лежат в строке j строго левее i -того столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар u объявляется свободным. После того, как все шары $(j + 1)$ -ой строки будут разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары j -той строки, не являющиеся ни чьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример такого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):

$$\begin{array}{cccccc}
 2(2) & & 2(0) & & 4(1) & & 3(0) & & 3(0) \\
 & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 3(0) & & 2(0) & & 6(1) & & 1(0) & & 3(3)
 \end{array} \quad (4-5)$$

По определению, операция D_j опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар $(j + 1)$ -ой строки или ничего не делает, если свободных шаров в $(j + 1)$ -ой строке нет. Операция U_j поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар j -той строки или ничего не делает, если в j -ой строке нет свободных шаров. Так, в примере (4-5) операция D_j (соотв. U_j) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке.

Если операция изменяет массив, мы будем говорить, что она действует на этот массив *эффективно*. Из конструкции устойчивого паросочетания ясно, что все свободные шары j -той строки лежат нестрого правее свободных шаров $(j + 1)$ -ой строки. Поэтому, когда операция D_j действует на массив a эффективно, опущенный ею шар становится самым левым свободным шаром j -той строки в устойчивом паросочетании между преобразованными строками. Стало быть, операция U_j , применённая к массиву $D_j a$ поднимет этот опущенный шар назад, т. е. $U_j D_j a = a$ всякий раз, когда D_j действует на a эффективно. Аналогично, если U_j действует эффективно, то $D_j U_j a = a$.

Говоря неформально, набор вертикальных операций D, U образует структуру, близкую к групповой — исходный массив a однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова $D = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$ по формуле $a = U_{j_k} \cdots U_{j_1} (D_{j_1} \cdots D_{j_k}(a))$ при условии, что каждая буква D_j действует эффективно. Мы будем называть такие D -слова *a -эффективными* (или просто *эффективными*, если понятно, о каком a речь).

4.1.2. Горизонтальные операции L_i и R_i определяются симметричным образом: они действуют в i -м и $(i + 1)$ -м столбцах и превращаются в операции D и U при транспонировании массива, т. е. $L_i(a) = (D_i(a^t))^t$ и $R_i(a) = (U_i(a^t))^t$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Переговорите это определение явно: скажите, как установить устойчивое паросочетание между i -тым и $(i + 1)$ -м столбцом, и какой шар будут перемещать R_i и L_i .

Отметим, что операции D, L сохраняют столбцовый вес, а операции R, U — строчный.

ЛЕММА 4.1 (ЛЕММА О КОММУТИРОВАНИИ)

Каждая из горизонтальных операций L_i, R_i перестановочна с каждой из вертикальных операций D_j, U_j .

Доказательство. Мы покажем, что D_j и U_j перестановочны с L_i — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции L_i заключается в перемещении шара u на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что эта процедура не изменяет устойчивого паросочетания между $(j + 1)$ -ой и j -той строкой в том смысле, что после применения L_i связанными в пары будут в точности те же самые шары, что и до применения. Это очевидно, когда u лежит вне $(j + 1)$ -ой и j -той строк. Остаются два случая, представленные на рис. 4♦1.

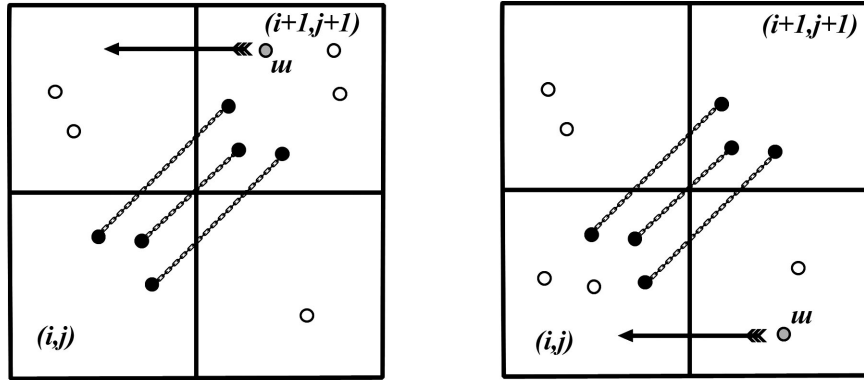


Рис. 4♦1. Действие L_i не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Пусть u лежит в $(j + 1)$ -ой строчке, т. е. в клетке $(i + 1, j + 1)$, как на левой картинке с рис. 4♦1. Тогда все шары из клетки (i, j) имеют партнёров в клетке $(i + 1, j + 1)$, иначе шар u получил бы себе партнёра в клетке (i, j) в паросочетании между i -тым и $(i + 1)$ -м столбцом. Поэтому, если в строчном паросочетании у шара u был партнёр, то он был строго левее клетки (i, j) , а значит и останется партнёром после перемещения u на клетку влево. А если партнёра у u не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении u строчное паросочетание не изменяется.

Пусть u лежит в j -той строчке, как на правой картинке с рис. 4♦1. Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки $(i + 1, j + 1)$ имеют партнёров в клетке (i, j) . Но тогда и в строчном паросочетании все шары из $(i + 1, j + 1)$ -той клетки получают партнёров в клетке (i, j) . Поэтому перемещение шара u на клетку влево и в этом случае не изменит ни его статуса, ни партнёра (если таковой был). \square

Следствие 4.1

Слово a , составленное из горизонтальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на a , когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a вертикальными операциями. Аналогично, слово V , составленное из вертикальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на a , когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a горизонтальными операциями.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, второе устанавливается аналогично. Достаточно проверить, что для любых i, j операция L_i эффективно действует на a тогда и только тогда, когда она эффективно действует на $D_j a$, и только тогда, когда она эффективно действует на $U_j a$. Если $L_i a = a$, то $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$, и

$L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$. Наоборот, если $L_i a \neq a$, то i -тая компонента столбцового веса $w^l(L_i a)$ будет строго больше i -той компоненты $w^l(a)$, а так как D_j и U_j не меняют столбцовый вес, то $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$. \square

4.2. Уплотнение массивов. Будем называть массив D-, L-, R- или U-плотным (т. е. плотным вниз, влево, вправо или вверх), если все элементарные операции соответствующего типа действуют на него тождественно. Применение к произвольному массиву достаточно большого числа операций одного из типов приводит к плотному в соответствующую сторону массиву. Такое уплотнение, как правило, можно производить многими разными способами. На рис. 4♦2 показаны два пути уплотнения случайно взятого массива 3×2 .

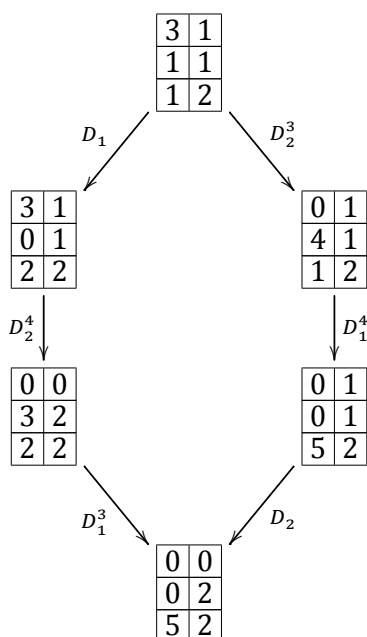


Рис. 4♦2. Два пути уплотнения вниз

Обратите внимание, что результат уплотнения оказался не зависящим от способа уплотнения. Мы докажем это фундаментальное свойство уплотнений в предл. 4.1, но прежде сделаем одно важное замечание о связи массивов с диаграммами Юнга.

4.2.1. Биplotные массивы и диаграммы Юнга. Из сл. 4.1 вытекает, что при действии вертикальных операций на плотный влево или вправо массив этот массив будет оставаться плотным в ту же сторону. То же самое справедливо для действия горизонтальных операций на массив, который плотен вниз или вверх. Поэтому любой массив можно сделать плотным одновременно в каком-нибудь вертикальном и в каком-нибудь горизонтальном направлении. Мы будем называть такие массивы DL-плотными, DR-плотными, и т. п. Поскольку далее мы будем заниматься в основном DL-уплотнениями, условимся называть просто биplotными массивы, плотные одновременно вниз и влево. Все шары в биplotном массиве лежат лишь в клетках главной диагонали $i = j$, причём их количества нестрого убывают с ростом i . Поэтому столбцовый вес биplotного массива равен строчному и представляет собой диаграмму Юнга

$\lambda = w^l(b) = w^r(b)$, т. е. биплотные массивы b взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга¹. Диаграмма Юнга, отвечающая биплотному массиву, который получается DU-уплотнением данного массива a , называется *формой* массива a и обозначается $\Phi(a)$. Докажем теперь, что это понятие корректно.

Предложение 4.1

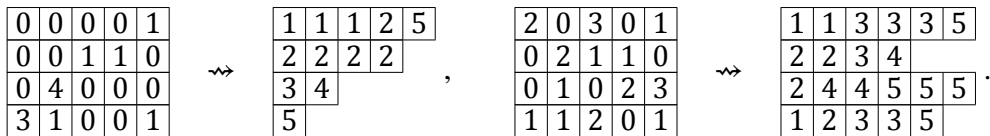
Результат D-, L-, R- или U-уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай D-уплотнения. Если массив a плотен влево, то результат его D-уплотнения — это биплотный массив, отвечающий диаграмме Юнга $w^l(a)$. Поскольку $w^l(a)$ не меняется при вертикальных уплотняющих операциях, результат D-уплотнения L-плотного массива не зависит от способа уплотнения. Пусть теперь a произволен. Зафиксируем какое-нибудь слово $L = L_{i_1} L_{i_2} \dots L_{i_k}$, эффективно уплотняющее a влево до L-плотного массива $a' = La$. Тогда для любого слова $D = D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_k}$, такого что Da плотен вниз, действие L на Da тоже будет эффективным, а массив $LDa = DLa$ будет биплотен (поскольку применение L сохраняет свойство массива Da быть плотным вниз, а применение D сохраняет свойство массива La быть плотным влево). Таким образом, мы можем записать Da как $L^{-1}DLa$. Так как массив DLa , по уже доказанному, не зависит от выбора уплотняющего слова D (ибо DLa есть D-уплотнение L-плотного массива La), массив $Da = L^{-1}DLa$ тоже не зависит от выбора D . □

4.2.2. Плотные массивы и таблицы Юнга. Из любого массива высоты m и ширины n можно изготовить m слов (по одному слову из каждой строки массива), записанных алфавитом $\{1, 2, \dots, n\}$. Делается это при помощи процедуры, которая называется *строчной развёрткой* массива и состоит в следующем. Интерпретируем все шарики массива как буквы, равные номеру того столбца, где стоит шарик. После этого пройдем по каждой строке слева направо, выписывая подряд все встречающиеся нам буквы. В результате j -тая строка массива развернется в слово

$$\underbrace{11 \dots 1}_{a(1,j)} \underbrace{22 \dots 2}_{a(2,j)} \dots \dots \dots \underbrace{nn \dots n}_{a(n,j)} .$$

Получающиеся m слов запишем друг под другом в столбик, *сверху вниз*², выровняв их по левому краю. Например:



¹здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем между собою две конечных последовательности неотрицательных целых чисел, получающиеся одна из другой приписыванием справа любого числа нулей; например, мы считаем равными диаграммы (2, 1, 1) и (2, 1, 1, 0, 0, 0)

²таким образом из нижней строки массива получается верхнее слово и т. д.

Очевидно, что буквы в каждом слове строчной развёртки нестрого возрастают. Условие плотности массива вниз (как в левом примере выше) означает, что под каждой буквой « i » в j -том слове (т. е. под шариком, пришедшим из клетки $a(i, j)$) стоит строго большая, чем « i », буква $(j + 1)$ -го слова (партнёр этого шарика при устойчивом паросочетании между j -той и $(j + 1)$ -ой строками массива). Следовательно, длины слов строчной развёртки плотного вниз массива нестрого убывают сверху вниз, т. е. образуют диаграмму Юнга, а буквы $\{1, 2, \dots, n\}$ заполняют эту диаграмму нестрого возрастаая по строкам и *строго* возрастаая по столбцам. Такие заполнения данной диаграммы λ называются *таблицами Юнга* формы λ на алфавите $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Мы доказали следующий комбинаторный факт:

ЛЕММА 4.2

Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными вниз массивами размера $m \times n$ и таблицами Юнга из $\leq m$ строк на алфавите $\{1, 2, \dots, n\}$. \square

4.2.3. Плотные массивы и тексты Яманучи. L-плотность массива a можно воспринимать как D-плотность транспонированного массива a^t и формулировать в терминах столбцовой развёртки: плотные влево массивы биективно соответствуют таблицам Юнга из $\leq n$ строк в алфавите J . Полезно, однако, охарактеризовать L-плотность и в терминах строчной развёртки. Для этого будем читать слова *строчной* развёртки L-плотного массива a *справа налево* одно за другим, сверху вниз. Условие плотности влево означает тогда, что в любом начальном куске получающейся последовательности букв единиц будет не меньше, чем двоек, двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для всех пар последовательных букв « i » и « $(i + 1)$ » из I . В комбинаторике такой текст называют *текстом Яманучи*. Например, левая из двух строчных развёрток

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline \end{array}$$

является текстом Яманучи, а правая — нет. Итак, нами установлена

ЛЕММА 4.3

Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными влево массивами размера $m \times n$ и текстами Яманучи из $\leq m$ слов на алфавите $\{1, 2, \dots, n\}$. \square

4.2.4. Послойное произведение. Дизъюнктное объединение прямых произведений слоёв отображений множеств $\varphi : X \rightarrow Z$ и $\psi : Y \rightarrow Z$ над всеми точками $z \in Z$ обозначается

$$X \times_Z Y \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{z \in Z} \varphi^{-1}(z) \times \psi^{-1}(z)$$

и называется *послойным* (или *расслоенным*) произведением множеств X и Y над Z . Послойные проекции $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ включаются в коммутативную

диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times Y & \\
 \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\
 X & & Y \\
 \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\
 & Z &
 \end{array} \quad (4-6)$$

которая называется *декартовым квадратом*. Она универсальна в том смысле, что для любого другого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 \xi \swarrow & & \searrow \eta \\
 X & & Y \\
 \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\
 & Z &
 \end{array}$$

имеется единственное отображение $\alpha : M \rightarrow X \times_Z Y$, такое что $\xi = \pi_X \circ \alpha$ и $\eta = \pi_Y \circ \alpha$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Убедитесь в этом и покажите, что универсальное свойство определяет верхний угол квадрата (4-6) однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми стрелками квадрата.

ТЕОРЕМА 4.1

Множество всех массивов \mathcal{M} является послойным произведением множеств плотных влево массивов \mathcal{L} и плотных вниз массивов \mathcal{D} над множеством биplotных массивов \mathcal{B} , т. е. коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M} & \\
 L \swarrow & & \searrow D \\
 \mathcal{L} & & \mathcal{D} \\
 D \searrow & & \swarrow L \\
 & \mathcal{B} &
 \end{array}$$

в котором стрелки L и D переводят массив в его уплотнения влево и вниз, является декартовым.

Доказательство. По [предл. 4.1](#) стрелки L и D корректно определены и перестановочны друг с другом. Мы должны показать, что отображение $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$, сопоставляющее массиву a пару (La, Da) со свойством $DLa = LDa \in \mathcal{B}$ взаимно однозначно. Сначала установим его инъективность. Пусть массивы a и a' таковы, что $La = La'$ и $Da = Da'$, и пусть слово Λ эффективно уплотняет массив $Da = Da'$ влево. Тогда Λ эффективно действует на a и a' так, что $\Lambda a = \Lambda a' = La = La'$, откуда $a = \Lambda^{-1}La = \Lambda^{-1}La' = a'$. Теперь докажем сюръективность. Для любой пары массивов (a_ℓ, a_d) , в

которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, и $Da_\ell = La_d$, рассмотрим слово Λ , эффективно уплотняющее a_d влево до La_d . Обратное слово Λ^{-1} эффективно действует на $La_d = Da_\ell$, а значит, и на a_ℓ . Массив $a = \Lambda^{-1}a_\ell$ таков, что $La = a_\ell$ и $Da = D\Lambda^{-1}a_\ell = \Lambda^{-1}Da_\ell = \Lambda^{-1}La_d = a_d$. \square

ПРИМЕР 4.1 (ГРАФИКИ ОТОБРАЖЕНИЙ И СТАНДАРТНЫЕ ТАБЛИЦЫ)

График отображения множеств $a : I \rightarrow J$ — это массив, в каждом столбце которого имеется ровно один шарик. По [теор. 4.1](#) такие массивы взаимно однозначно параметризуются парами (a_ℓ, a_d) в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, причём оба этих массива имеют одинаковую форму $Da_\ell = La_d$, и $w^I(a_d) = (1, 1, \dots, 1)$. По [п° 4.2.2](#) каждая такая пара однозначно описывается следующим набором данных:

- форма $\Phi(a)$ массива a , представляющая собою диаграмму Юнга $\lambda = DLa = LDa$ веса $|\lambda| = n$
- строчная развёртка D-уплотнения a_d массива a , представляющая собою таблицу Юнга формы λ на алфавите I , в которой каждая буква используется ровно один раз.
- столбцовая развёртка L-уплотнения¹ a_ℓ массива a , представляющая собою таблицу Юнга формы λ на алфавите J

Число всех таблиц Юнга формы λ на m -буквенном алфавите принято обозначать через $d_\lambda(m)$. Таблицы формы λ заполненные без повторений числами от 1 до $|\lambda|$ называются *стандартными таблицами* формы λ , и их число обозначается просто через d_λ . Так как всего имеется m^n отображений $I \rightarrow J$, мы получаем соотношение

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda} \cdot d_{\lambda}(m) = m^n, \quad (4-7)$$

где суммирование идёт по всем n -клеточным диаграммам Юнга и числа $d_{\lambda}(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leq m$ строк.

В ситуации, когда $\#J = \#I = n$ и рассматриваются только взаимно однозначные отображения $I \simeq J$, предыдущая конструкция устанавливает биекцию между $n!$ элементами симметрической группы S_n и парами стандартных таблиц одинаковой формы веса n , откуда

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda}^2 = n!, \quad (4-8)$$

где сумма идёт о всем n -клеточным диаграммам. Эта биекция индуцирует взаимно однозначное соответствие между инволютивными перестановками² $\sigma \in S_n$ в самосопряжёнными массивами $a = a^t$, которым в по [теор. 4.1](#) отвечают пары одинаковых стандартных таблиц. Поэтому

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda} = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\}. \quad (4-9)$$

¹т. е. строчная развёртка транспонированного массива a_ℓ^t

²т. е. такие, что $\sigma^2 = 1$

4.3. Действие симметрической группы на DU-множествах. Будем называть *DU-множеством* всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями D и U . Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций D и U . DU-множество, на котором операции D и U действуют транзитивно, будем называть *DU-орбитой*. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита O такого массива a_d состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из a_d эффективными U -словами. Мы будем называть a_d *нижним концом орбиты O* .

Лемма 4.4

Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. Всякое DU-множество является дизъюнктивным объединением DU-орбит.

Доказательство. Не вполне очевидно, разве что, утверждение про разности. Пусть A' и A'' DU-инвариантны и $a' \in A' \setminus A''$. Если $D_j a' \in A''$, то D_j действует эффективно, и тогда $a' = U_j D_j a'$ тоже лежит в A'' . \square

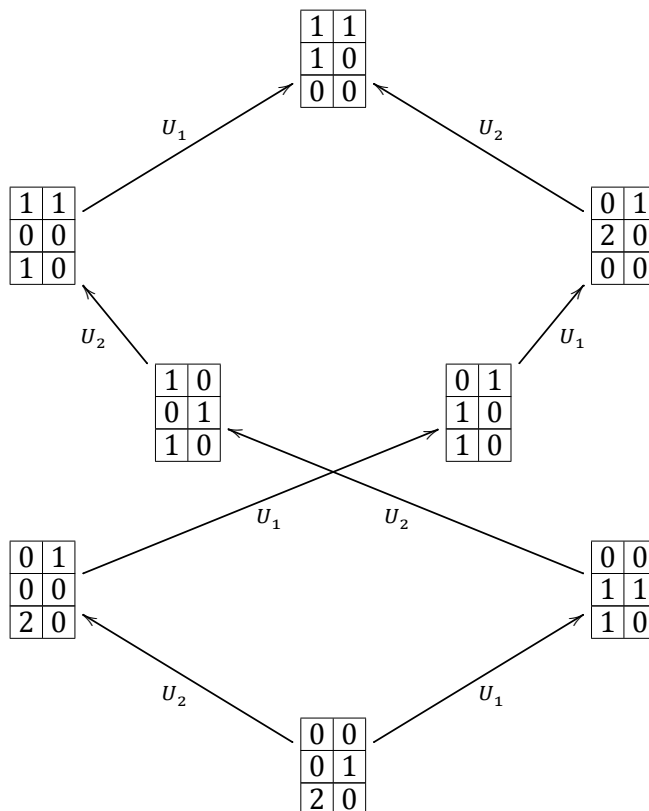


Рис. 4♦3. Стандартная DU-орбита $O_{(2,1)}$.

4.3.1. Стандартные орбиты. DU-орбиты O_λ биplotных массивов λ называются *стандартными*. Например, при $t = 3$ стандартная орбита $O_{(2,1)}$, отвечающая диа-

грамме – таблице – массиву

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

состоит из восьми массивов, представленных на рис. 4♦3.

Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты O со стандартной орбитой O_λ , нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты O . Мы будем называть λ *типом* орбиты O . Количество орбит типа λ в данном DU-множестве M равно количеству плотных вниз массивов строчного веса λ , имеющих в M .

4.3.2. Действие симметрической группы $S_m = \text{Aut}(J)$. На каждом DU-множестве массивов M имеется действие элементарных транспозиций $\sigma_j = (j, j+1)$, порождающих симметрическую группу S_m , переставляющую строки массива. Оно определяется следующим образом.

Пусть в j -той и $(j+1)$ -ой строках после установления между ними устойчивого паросочетания образовалось, соответственно, s_j и s_{j+1} свободных шаров. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j-s_{j+1}}. \quad (4-10)$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу n -того столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно $|s_{j+1} - s_j|$ свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция σ_j просто передвигает их по вертикали в другую строку (или ничего не делает, если $s_j = s_{j+1}$). В частности, действие σ_j на строчный вес w^J состоит в перестановке j -той и $(j+1)$ -ой координаты.

Из предыдущего описания видно, что $\sigma_j^2 = \text{Id}$, а также, что σ_j коммутирует с циклическими перестановками столбцов. Очевидно также, что σ_j перестановочна с горизонтальными операциями R, L и со всеми σ_k с $|k - j| \geq 2$. Чтобы действие σ_j непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу S_m достаточно проверить соотношение треугольника $\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}$. При этом можно считать массив трёхстрочным. Левое уплотнение L и циклическая перестановка столбцов C превращает любой трёхстрочный массив в одностолбцовый:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & c & a \\ \hline e & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & f \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|} \hline g & h & 0 \\ \hline k & 0 & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|} \hline h & g \\ \hline 0 & k \\ \hline 0 & f \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|} \hline \ell & 0 \\ \hline k & 0 \\ \hline f & 0 \\ \hline \end{array}$$

на который σ_j и σ_{j+1} действуют перестановками строк, и соотношение треугольника, таким образом, выполняется.

4.4. Полиномы Шура. Интерпретируем все шарики из j -той строки как переменные x_j и сопоставим каждому массиву a моном $x^a \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{w_1^j(a)} x_2^{w_2^j(a)} \dots x_m^{w_m^j(a)}$, получающийся

перемножением всех его шариков. Сумма этих мономов по всем массивам данного DU-множества M обозначается

$$s_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in M} x^a \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_m]$$

и называется *многочленом Шура* DU-множества M . Симметрическая группа S_m переставляет координаты весового вектора и действует на мономы x^a перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество M является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите O_λ , произвольный полином Шура является линейной комбинацией с неотрицательными целыми коэффициентами *стандартных* многочленов Шура $s_\lambda(x)$, отвечающих биplotным массивам (диаграммам Юнга) λ :

$$s_M(x) = \sum_{\lambda \in \Phi(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x), \quad (4-11)$$

где суммирование происходит по всем формам λ массивов из M , и коэффициент c_M^λ равен числу DU-орбит, изоморфных O_λ , т. е. количеству всех плотных вниз массивов J -веса λ в M . Согласно н° 4.2.2, элементы стандартной орбиты O_λ суть всевозможные L -плотные массивы формы λ , и столбцовая развёртка устанавливает биекцию между такими массивами и таблицами Юнга формы λ в алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Таким образом, стандартный полином Шура имеет вид

$$s_\lambda(x) = \sum_{\eta} K_{\lambda, \eta} \cdot x^\eta = \sum_{\eta} K_{\lambda, \eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \dots x_m^{\eta_m}, \quad (4-12)$$

где $\eta \in \mathbb{Z}_{>0}^m$ пробегает m -мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент $K_{\lambda, \eta}$ равен числу таблиц формы λ , заполненных η_1 единицами, η_2 двойками и т. д. Мы будем говорить, что такая таблица имеет *состав* η .

Например, при $m = 3$ из представленной на рис. 4♦3 схемы получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

Число $K_{\lambda, \eta}$ таблиц формы λ и состава η называется *числом Костки*. Отметим, что $K_{\lambda, (1^{|\lambda|})} = d_\lambda$ равно числу стандартных таблиц формы λ , все $K_{\lambda, \lambda} = 1$, и $K_{\lambda, \eta} \neq 0$ только когда при каждом $j = 1, 2, 3, \dots$ выполняются неравенства

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_j \quad \forall j. \quad (4-13)$$

В этой ситуации говорят, что диаграмма λ *доминирует* вектор η и пишут $\lambda \supseteq \eta$.

Упражнение 4.3. Покажите, что отношение доминирования задаёт на множестве диаграмм Юнга заданного веса n частичный порядок, полный при $n \leq 5$, и приведите пример двух несравнимых между собою диаграмм Юнга веса 6.

Из формулы (4-12) вытекает, что стандартные многочлены Шура $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более, чем m строк, выражаются через базисные мономиальные симметрические многочлены m_μ при помощи нижней унитарной матрицы

$$s_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} K_{\lambda, \mu} \cdot m_\mu. \quad (4-14)$$

Поскольку такая матрица обратима над \mathbb{Z} , многочлены s_λ тоже образуют базис \mathbb{Z} -модуля симметрических функций.

ПРИМЕР 4.2 (полные и элементарные симметрические многочлены)

Многочлен Шура $s_{(k)}(x)$, отвечающий DU-орбите одностолбцового массива, т. е. диаграммы-строки

$$\lambda = (k, 0, \dots, 0) = \underbrace{\square \square \dots \square \square}_{k},$$

представляет собой *полный симметрический многочлен* $h_k(x)$ — сумму всех мономов общей степени k от x_1, x_2, \dots, x_m , поскольку для любого содержания η веса $|\eta| = k$ имеется ровно одна однострочная таблица, в которой все координаты выстроены монотонно¹. Симметричным образом, $s_{(1^k)}$, отвечающий DU-орбите диаграммы-столбца

$$1^k = (1, 1, \dots, 1) = \left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} k$$

это *элементарный симметрический многочлен* $e_k(x)$, т. е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени k от x_1, x_2, \dots, x_m . Причина та же, только теперь номера переменных в таблице-столбце должны строго возрастать.

ПРИМЕР 4.3 (тождества Коши и Шура.)

Проинтерпретируем каждый шарик в клетке (i, j) массива a как билинейный моном $x_i y_j$ от двух наборов переменных $x = x^I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = y^J = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Перемножая вместе все шарики массива a , мы получим (в обозначениях н° 4.4) моном $x^{a^t} y^a$. По теореме о биекции из теор. 4.1 сумма таких мономов по всем массивам a фиксированной формы $\lambda = \Phi(a)$ равна произведению многочленов Шура $s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$, и значит сумма мономов $x^{a^t} y^a$ по вообще всем массивам a формата $I \times J$ равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга λ .

С другой стороны, сумма всех мономов $x^{a^t} y^a$ по всем массивам a получается при раскрытии скобок в произведении бесконечных геометрических прогрессий

$$\prod_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \dots)$$

(выбирая из (i, j) -того сомножителя слагаемое $(x_i y_j)^{a(i,j)}$ мы получаем в точности моном $x^{a^t} y^a$, отвечающий массиву a). Таким образом, мы приходим к *тождеству Коши*:

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) \cdot s_{\lambda}(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \quad (4-15)$$

¹эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса k образована всеми возможными расположениями k шариков по t ящикам

Если взять $I = J$, ограничиться только симметричными массивами $a = a^t$, положить $x = y = \xi$ и извлечь из каждого a -монома корень

$$\xi^a = \sqrt{\xi^{at} \xi^a} = \sqrt{x^{at} y^a} \Big|_{x=y=\xi},$$

то, суммируя по всем симметричным массивам a заданной формы λ , мы получим $s_\lambda(\xi)$, а суммируя по вообще всем симметричным массивам a — сумму $\sum_\lambda s_\lambda(\xi)$. Тот же результат получится при раскрытии скобок в произведении прогрессий

$$\prod_k (1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \dots) \cdot \prod_{i < j} (1 + \xi_i \xi_j + (\xi_i \xi_j)^2 + (\xi_i \xi_j)^3 + \dots).$$

Мы получаем *тождество Шура*:

$$\sum_\lambda s_\lambda(\xi) = \prod_i \frac{1}{1 - \xi_i} \cdot \prod_{i < j} \frac{1}{1 - \xi_i \xi_j}. \quad (4-16)$$

4.5. Правило Литтлвуда – Ричардсона. Произведение полиномов Шура $s_M(x) \cdot s_N(x)$ DU-множеств M и N является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида ab размера $(2n) \times m$, получающихся приписыванием какого-нибудь массива $b \in N$ справа к какому-нибудь массиву¹ $a \in M$. Множество таких массивов естественно обозначить через $M \otimes N$ и называть *тензорным произведением* DU-множеств M и N . Итак,

$$s_M(x) \cdot s_N(x) = \left(\sum_{a \in M} x^a \right) \cdot \left(\sum_{b \in N} x^b \right) = \sum_{\substack{a \in M \\ b \in N}} x^{ab} = \sum_{c \in M \otimes N} x^c.$$

Разложение произведения $s_\lambda s_\mu$ стандартных полиномов Шура по базису s_ν даёт

ТЕОРЕМА 4.2 (ПРАВИЛО ЛИТТЛВУДА – РИЧАРДСОНА)

$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu \cdot s_\nu$, где суммирование происходит по всем диаграммам ν , получающимся добавлением $|\mu|$ клеток к диаграмме λ , а коэффициент $c_{\lambda\mu}^\nu$ равен количеству таких заполнений этих дописанных клеток μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д., что вдоль строк «косой диаграммы» $\nu \setminus \lambda$ числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно текст, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (т. е. является тестом Яманучи²).

Доказательство. Мы должны подсчитать в DU-множестве $O_\lambda \otimes O_\mu$ количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты O_ν . Пусть массив ab лежит

¹при этом вертикальный J -алфавит не меняется, а горизонтальный I -алфавит заменяется дизъюнктивным объединением I -алфавитов массивов a и b

²см. п. 4.2.3 на стр. 48

в такой орбите. Поскольку массивы a, b получены из биplotных массивов λ, μ вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют I -веса λ и μ соответственно. Заметим, что действие вертикальной уплотняющей операции D_j на «толстый» массив ab состоит либо в её действии отдельно на¹ b , либо в её действии отдельно на² a . Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива ab мы получим массив вида $a'b'$, в котором a' плотен вниз, и оба массива a', b' по прежнему плотны влево и имеют I -веса λ, μ . Таким образом, a' биplotен формы λ . Если форма массива $a'b' = \lambda b'$ равна ν , то строки горизонтальной развёртки массива b' — это выровненные по левому краю строки «косой таблицы» $\nu \setminus \lambda$, заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда – Ричардсона: первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива ab , а второе, «текстовое», ограничение выражает, согласно н° 4.2.3, плотность влево массива b' . \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Пользуясь правилом Литтлвуда – Ричардсона вычислите в Λ_3 произведения $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и $s_{2,1}^2$. В частности, убедитесь непосредственно, что в первом случае «честное» и «халявное» вычисления³ дают одинаковые ответы.

УПРАЖНЕНИЕ 4.5 (ФОРМУЛЫ ПЬЕРИ). Выведите из правила Литтлвуда-Ричардсона формулы Пьери для умножения полиномов Шура на элементарные и полные симметрические многочлены:

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum_{\mu} s_{\mu} \quad (4-17)$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum_{\nu} s_{\nu} \quad (4-18)$$

где μ и ν пробегают все диаграммы, которые можно получить приписыванием k новых клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку μ и в один столбец ν .

4.5.1. Тожество Якоби – Труднн. Из формулы Пьери (4-18) и формулы Пьери из сл. 3.6 на стр. 40 вытекает, что детерминантные полиномы Шура $\Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_{\delta}$ из предыдущего параграфа и комбинаторные полиномы Шура s_{λ} стандартных DU-орбит — это одни и те же полиномы. В самом деле, формулы Пьери позволяют однозначно выразить все многочлены Шура через многочлены h_k . Например, согласно (4-18)

$$\begin{aligned} s_{(2,2,1)} &= s_{(2,2)}h_1 - s_{(3,2)} \\ s_{(3,2)} &= s_{(3)}h_2 - s_{(5)} - s_{(4,1)} = h_3h_2 - h_5 - s_{(4,1)} \\ s_{(2,2)} &= s_{(2)}h_2 - s_{(3,1)} - s_{(4)} = h_2^2 - h_4 - s_{(3,1)} \\ s_{(4,1)} &= s_{(4)}h_1 - s_{(5)} = h_4h_1 - h_5 \\ s_{(3,1)} &= s_{(3)}h_1 - s_{(4)} = h_3h_1 - h_4 \end{aligned}$$

¹если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива ab лежит в b , то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри b

²если в b нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива ab

³т. е. применяющее правило теор. 4.2 не к $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$, а к $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$, что не всё равно

откуда¹ $s_{(2,2,1)} = -h_3 h_2 + h_4 h_1 + h_1(h_2^2 - h_1 h_3)$. В общем случае, оставляя в правой части формулы (4-18) диаграмму с самой длинной нижней строкой среди всех диаграмм с наибольшим количеством строк, мы выражаем её через h_k (где k равно длине этой нижней строки) и диаграммы, имеющие то же число строк, но более короткую нижнюю строчку, или строго меньшее число строк. Далее используем убывающую индукцию по количеству строк диаграммы Юнга и длине её нижней строки.

Совпадение детерминантного и комбинаторного описания полиномов Шура называется *тождеством Якоби – Труды*.

4.5.2. Выражение e_λ и h_λ через s_λ . Напомним, что для диаграммы Юнга μ мы обозначаем через m_i количество строк длины i в этой диаграмме и полагаем

$$e_\mu = e_{\mu_1} e_{\mu_2} \cdots e_{\mu_r} = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n} \quad (4-19)$$

$$h_\mu = h_{\mu_1} h_{\mu_2} \cdots h_{\mu_r} = h_1^{m_1} h_2^{m_2} \cdots h_n^{m_n}. \quad (4-20)$$

Многочлены (4-19) и (4-20) называются, соответственно, *элементарными* и *полными симметрическими* многочленами. Отметим, что при $k \in \mathbb{N}$

$$e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{и} \quad h_k(x) = s_{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Произвольный многочлен $h_\eta = s_{(\eta_1)} s_{(\eta_2)} \cdots s_{(\eta_r)}$ представляет собою полином Шура DU-множества $O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_2)} \otimes \cdots \otimes O_{(\eta_r)}$. Орбиты формы ν в этом множестве биективно соответствуют своим нижним концам, которые в свою очередь, взаимно однозначно описываются таблицами формы ν и содержания η . Тем самым,

$$h_\eta = \sum_{\nu} K_{\nu, \eta} \cdot s_\nu. \quad (4-21)$$

Произвольный многочлен $e_\eta = s_{(1^{\eta_1})} s_{(1^{\eta_2})} \cdots s_{(1^{\eta_r})}$ представляет собою многочлен Шура DU-множества $O_{(1^{\eta_1})} \otimes O_{(1^{\eta_2})} \otimes \cdots \otimes O_{(1^{\eta_r})}$, каждый массив в котором имеет $|\eta|$ столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы $a_1 a_2 \dots a_r$ ширины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, причём в каждом столбце находится ровно один шар, и j -номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива a_i . При уплотнении вниз последнее свойство сохранится, и в результате такого уплотнения мы получим массив $a'_1 a'_2 \dots a'_r$ в котором шары каждого подмассива a'_i располагаются в разных строках, номера которых строго возрастают слева направо. Тем самым, каждый подмассив a'_i внесёт не более одного шара в каждую компоненту J -веса. Если суммарный J -вес при этом получится ν , то записывая в каждую строку диаграммы ν последовательно номера i тех подмассивов a'_i , которые дают вклад в эту компоненту J -веса, мы получим таблицу содержания η и формы ν^t , сопряжённой² к форме ν : в силу вышесказанного номера будут строго возрастать по строкам диаграммы ν , а поскольку массив плотен вниз, они также должны не строго возрастать по столбцам; кроме того, по построению, каждый номер i будет представлен ровно в η_i различных строчках. Итак,

$$e_\eta = \sum_{\nu} K_{\nu^t, \eta} \cdot s_\nu. \quad (4-22)$$

¹читателю рекомендуется проверить этот результат по формуле Джамбелли (3-25)

²или *транспонированной*, т. е. симметрично отражённой относительно главной диагонали

Следствие 4.2

Инволюция ω из предл. 3.3, переводящая e_k и h_k друг в друга, действует на полиномы Шура по правилу $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^t}$, т. е. переводит друг в друга многочлены, отвечающие транспонированным диаграмм Юнга.

Доказательство. Так как многочлены s_λ образуют базис \mathbb{Z} -модуля симметрических функций, отображение $s_\lambda \mapsto s_{\lambda^t}$ однозначно задаёт на модуле симметрических функций \mathbb{Z} -линейную инволюцию. Из формул (4-21) и (4-22) следует, что эта инволюция переводит e_k в h_k и наоборот, т. е. совпадает с ω . \square

Следствие 4.3 (вторая формула Джамбелли)

$$s_{\lambda^t} = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \cdots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \cdots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (4-23)$$

(по главной диагонали стоят $e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \dots, e_{\lambda_n}$, и при движении вдоль строк слева направо индексы у e с каждым шагом увеличиваются на единицу). \square

Доказательство. Применяем инволюцию ω к формуле Джамбелли (3-25). \square

4.6. Скалярное произведение Введём на \mathbb{Z} -модуле симметрических функций Λ скалярное произведение $\langle *, * \rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным. Из формул (4-21) и (4-14)

$$h_\lambda = \sum_{\mu \geq \lambda} K_{\mu, \lambda} \cdot s_\mu, \quad s_\mu = \sum_{\lambda \geq \mu} K_{\mu, \lambda} \cdot m_\lambda$$

вытекает, что $\langle h_\lambda, s_\mu \rangle = K_{\mu, \lambda} = \langle m_\lambda^*, s_\mu \rangle$, где m_λ^* — базис, двойственный к m_λ . Таким образом, $m_\lambda^* = h_\lambda$, т. е. базисы h_λ и m_λ двойственны друг другу:

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}. \quad (4-24)$$

Из сл. 4.2 вытекает, что инволюция ω является ортогональным оператором.

Предложение 4.2

Многочлены Ньютона p_λ составляют ортогональный базис пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами и имеют скалярные квадраты $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda$, где¹ $z_\lambda = \prod_k (m_k! \cdot k^{m_k})$.

¹ср. с формулами (3-19) на стр. 36

Доказательство. Выразим произведение геометрических прогрессий в правой части тождества Коши (4-15) через функции Ньютона от наборов переменных x и y :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x)s_{\lambda}(y) &= \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \exp\left(\int_0^{y_j} P(t) dt\right) = \\ &= \exp\left(\sum_j \sum_k \frac{1}{k} p_k(x)y_j^k\right) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) = \prod_k \exp\left(\frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) = \\ &= \prod_k \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{\ell! \cdot k^{\ell}} (p_k(x)p_k(y))^{\ell} = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_{\lambda}} p_{\lambda}(x)p_{\lambda}(y) \end{aligned}$$



(переход в последнем равенстве тот же, что и в доказательстве равенства (3-21) на стр. 36). Если обозначить через $C_{\lambda\mu} = \langle s_{\lambda}, p_{\mu} \rangle$ коэффициенты разложений Ньютоновских полиномов по базису из полиномов Шура, так что $p_{\mu} = \sum_{\lambda} C_{\lambda\mu} s_{\lambda}$, то подставляя эти разложения в правую часть полученного выше равенства и приравнявая коэффициенты при $s_{\lambda}(x)s_{\eta}(y)$ в левой и правой части, получаем соотношения

$$\sum_{\nu} C_{\nu\lambda} C_{\nu\eta} = \begin{cases} z_{\lambda} & \text{при } \eta = \lambda \\ 0 & \text{при } \eta \neq \lambda \end{cases}$$

т. е. матрица Грама $(\langle p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle) = C^t \cdot C$ диагональна с диагональными элементами z_{λ} . \square

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. Устойчивое паросочетание между i -тым и $(i + 1)$ -м столбцом устанавливается так: последовательно перебираем шарики в $(i + 1)$ -ом столбце двигаясь снизу вверх и назначаем очередному шару $\mathbf{ш}$ партнёром самый верхний шар i -того столбца, лежащий строго ниже $\mathbf{ш}$ и ещё не назначенный никому партнёром, а если таких шаров нет, объявляем $\mathbf{ш}$ свободным. После того, как все шары $(i + 1)$ -го столбца разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары i -того столбца, не являющиеся ни чьими партнёрами, тоже объявляются свободными. Операция L_i перемещает на одну клетку влево самый верхний свободный шар $(i + 1)$ -го столбца или ничего не делает, если свободных шаров в $(i + 1)$ -ом столбце нет. Операция R_i перемещает на одну клетку вправо самый нижний свободный шар i -го столбца или ничего не делает, если в i -ом столбце нет свободных шаров.

Упр. 4.3. Диаграммы  и  несравнимы по отношению \succeq .

Упр. 4.4. $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)} = s_{(2,1)} + s_{(1,1,1)} = s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$

Упр. 4.5. При вычислении $s_\lambda \cdot e_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток без повторений заполненных числами от 1 до k , и если 2 из них попадают в одну строку, то возникает противоречие либо с табличным ограничением, либо с ограничением Яманучи. При вычислении $s_\lambda \cdot h_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток заполненных единицами, никакие две из которых не могут попасть в один столбец в силу табличного ограничения.