

## §4. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

**4.1. Массивы и элементарные операции над ними.** Зафиксируем два конечных упорядоченных множества из  $n$  и  $m$  элементов:

$$I = \{1, 2, \dots, n\}, \quad J = \{1, 2, \dots, m\} \quad (4-1)$$

и будем рассматривать прямоугольные таблицы из  $n$  столбцов и  $m$  строк, занумерованных элементами  $I$  и  $J$  соответственно. Таковую таблицу  $a$  мы будем называть *массивом* и размещать в *первом* квадранте декартовой системы координат так, чтобы элементы из  $I$  росли слева направо по горизонтальной оси, а элементы из  $J$  росли снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое  $a(i, j)$  клетки с координатами  $(i, j)$  у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое стоит воспринимать как «количество» или «массу». Весь массив удобно представлять себе как набор шариков одинаковой массы, наделенных двумя группами признаков и в соответствии с этим разложенных по ячейкам массива. Мы никогда не будем вычислять с числами  $a(i, j)$ , но будем переключать шарики из ячейки в ячейку, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп.

С массивом  $a$  связан *столбцовый вес* (или  *$I$ -вес*)

$$w^I = \left( \sum_j a(1, j), \sum_j a(2, j), \dots, \sum_j a(n, j) \right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \quad (4-2)$$

представляющий собой  $n$ -мерный целочисленный вектор,  $i$ -тая координата которого равна общему количеству шариков в  $i$ -том столбце. Аналогично определяется *строчный вес* (или  *$J$ -вес*)

$$w^J = \left( \sum_i a(i, 1), \sum_i a(i, 2), \dots, \sum_i a(i, m) \right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m. \quad (4-3)$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали  $i = j$ :

$$a \mapsto a^t : a^t(i, j) = a(j, i). \quad (4-4)$$

На множестве  $\mathcal{M}$  всех массивов действуют четыре набора *элементарных операций*

$$D_j, \quad U_j, \quad L_i, \quad R_i, \quad \text{где } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-1.$$

При применении любой из этих операций к данному массиву  $a \in \mathcal{M}$  массив  $a$  либо никак не меняется, либо ровно один его шарик перемещается ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right) в соответствии с обозначением для операции.

**4.1.1. Вертикальные операции  $D_j$  и  $U_j$**  перемещают шар по вертикали в пределах соседних  $j$ -той и  $(j+1)$ -ой строки. Чтобы узнать, какой именно шар следует передвинуть (или убедиться в том, что такого шара нет), следует вначале установить между  $j$ -той и  $(j+1)$ -ой строкой *устойчивое паросочетание*<sup>1</sup>. Делается это следующим образом.

<sup>1</sup>по-английски: *stable matching*

Будем последовательно перебирать шарики в  $(j + 1)$ -ой строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в  $j$ -той строке, либо объявлять свободными. Пусть очередной шарик  $u$  лежит в клетке  $(i, j + 1)$ . Его партнёром называем самый правый шар из тех, что лежат в строке  $j$  строго левее  $i$ -того столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар  $u$  объявляется свободным. После того, как все шары  $(j + 1)$ -ой строки будут разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары  $j$ -той строки, не являющиеся ни чьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример такого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):

$$\begin{array}{cccccc}
 2(2) & 2(0) & 4(1) & 3(0) & 3(0) & \\
 & // & // & // & // & \\
 3(0) & 2(0) & 6(1) & 1(0) & 3(3) & 
 \end{array} \quad (4-5)$$

По определению, операция  $D_j$  опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар  $(j + 1)$ -ой строки или ничего не делает, если свободных шаров в  $(j + 1)$ -ой строке нет. Операция  $U_j$  поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар  $j$ -той строки или ничего не делает, если в  $j$ -ой строке нет свободных шаров. Так, в примере (4-5) операция  $D_j$  (соотв.  $U_j$ ) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке.

Если операция изменяет массив, мы будем говорить, что она действует на этот массив *эффективно*. Из конструкции устойчивого паросочетания ясно, что все свободные шары  $j$ -той строки лежат нестрого правее свободных шаров  $(j + 1)$ -ой строки. Поэтому, когда операция  $D_j$  действует на массив  $a$  эффективно, опущенный ею шар становится самым левым свободным шаром  $j$ -той строки в устойчивом паросочетании между преобразованными строками. Стало быть, операция  $U_j$ , применённая к массиву  $D_j a$  поднимет этот опущенный шар назад, т. е.  $U_j D_j a = a$  всякий раз, когда  $D_j$  действует на  $a$  эффективно. Аналогично, если  $U_j$  действует эффективно, то  $D_j U_j a = a$ .

Говоря неформально, набор вертикальных операций  $D, U$  образует структуру, близкую к групповой — исходный массив  $a$  однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова  $D = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$  по формуле  $a = U_{j_k} \cdots U_{j_1} (D_{j_1} \cdots D_{j_k}(a))$  при условии, что каждая буква  $D_j$  действует эффективно. Мы будем называть такие  $D$ -слова  *$a$ -эффективными* (или просто *эффективными*, если понятно, о каком  $a$  речь).

**4.1.2. Горизонтальные операции  $L_i$  и  $R_i$**  определяются симметричным образом: они действуют в  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м столбцах и превращаются в операции  $D$  и  $U$  при транспонировании массива, т. е.  $L_i(a) = (D_i(a^t))^t$  и  $R_i(a) = (U_i(a^t))^t$ .

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Переговорите это определение явно: скажите, как установить устойчивое паросочетание между  $i$ -тым и  $(i + 1)$ -м столбцом, и какой шар будут перемещать  $R_i$  и  $L_i$ .

Отметим, что операции  $D, L$  сохраняют столбцовый вес, а операции  $R, U$  — строчный.

ЛЕММА 4.1 (ЛЕММА О КОММУТИРОВАНИИ)

Каждая из горизонтальных операций  $L_i, R_i$  перестановочна с каждой из вертикальных операций  $D_j, U_j$ .

Доказательство. Мы покажем, что  $D_j$  и  $U_j$  перестановочны с  $L_i$  — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции  $L_i$  заключается в перемещении шара  $u$  на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что эта процедура не изменяет устойчивого паросочетания между  $(j + 1)$ -ой и  $j$ -той строкой в том смысле, что после применения  $L_i$  связанными в пары будут в точности те же самые шары, что и до применения. Это очевидно, когда  $u$  лежит вне  $(j + 1)$ -ой и  $j$ -той строк. Остаются два случая, представленные на рис. 4♦1.

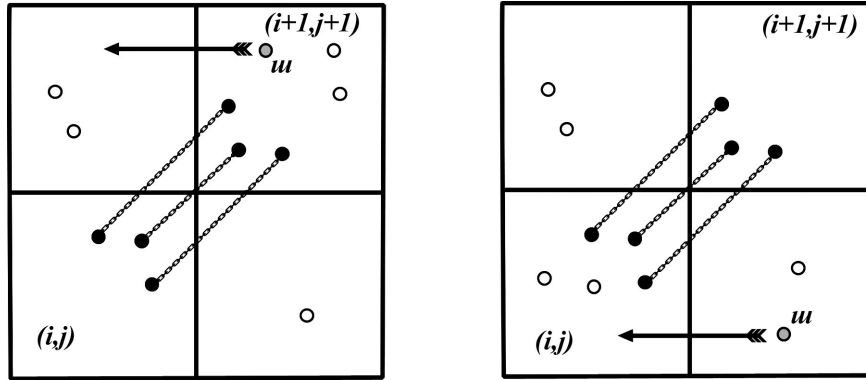


Рис. 4♦1. Действие  $L_i$  не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Пусть  $u$  лежит в  $(j + 1)$ -ой строчке, т. е. в клетке  $(i + 1, j + 1)$ , как на левой картинке с рис. 4♦1. Тогда все шары из клетки  $(i, j)$  имеют партнёров в клетке  $(i + 1, j + 1)$ , иначе шар  $u$  получил бы себе партнёра в клетке  $(i, j)$  в паросочетании между  $i$ -тым и  $(i + 1)$ -м столбцом. Поэтому, если в строчном паросочетании у шара  $u$  был партнёр, то он был строго левее клетки  $(i, j)$ , а значит и останется партнёром после перемещения  $u$  на клетку влево. А если партнёра у  $u$  не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении  $u$  строчное паросочетание не изменяется.

Пусть  $u$  лежит в  $j$ -той строчке, как на правой картинке с рис. 4♦1. Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки  $(i + 1, j + 1)$  имеют партнёров в клетке  $(i, j)$ . Но тогда и в строчном паросочетании все шары из  $(i + 1, j + 1)$ -той клетки получают партнёров в клетке  $(i, j)$ . Поэтому перемещение шара  $u$  на клетку влево и в этом случае не изменит ни его статуса, ни партнёра (если таковой был).  $\square$

#### Следствие 4.1

Слово  $a$ , составленное из горизонтальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на  $a$ , когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из  $a$  вертикальными операциями. Аналогично, слово  $V$ , составленное из вертикальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на  $a$ , когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из  $a$  горизонтальными операциями.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, второе устанавливается аналогично. Достаточно проверить, что для любых  $i, j$  операция  $L_i$  эффективно действует на  $a$  тогда и только тогда, когда она эффективно действует на  $D_j a$ , и только тогда, когда она эффективно действует на  $U_j a$ . Если  $L_i a = a$ , то  $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$ , и

$L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$ . Наоборот, если  $L_i a \neq a$ , то  $i$ -тая компонента столбцового веса  $w^l(L_i a)$  будет строго больше  $i$ -той компоненты  $w^l(a)$ , а так как  $D_j$  и  $U_j$  не меняют столбцовый вес, то  $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$ , и  $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$ .  $\square$

**4.2. Уплотнение массивов.** Будем называть массив D-, L-, R- или U-плотным (т. е. плотным вниз, влево, вправо или вверх), если все элементарные операции соответствующего типа действуют на него тождественно. Применение к произвольному массиву достаточно большого числа операций одного из типов приводит к плотному в соответствующую сторону массиву. Такое уплотнение, как правило, можно производить многими разными способами. На рис. 4♦2 показаны два пути уплотнения случайно взятого массива  $3 \times 2$ .

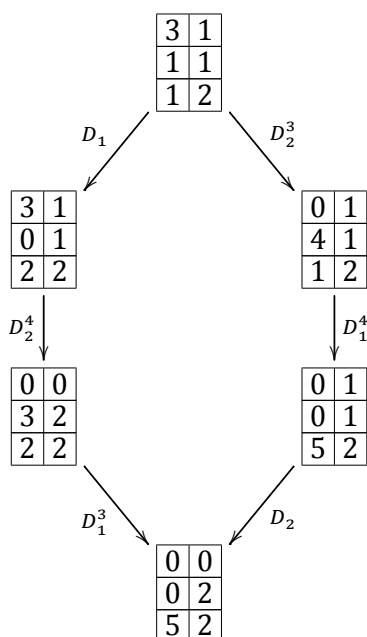


Рис. 4♦2. Два пути уплотнения вниз

Обратите внимание, что результат уплотнения оказался не зависящим от способа уплотнения. Мы докажем это фундаментальное свойство уплотнений в предл. 4.1, но прежде сделаем одно важное замечание о связи массивов с диаграммами Юнга.

**4.2.1. Биplotные массивы и диаграммы Юнга.** Из сл. 4.1 вытекает, что при действии вертикальных операций на плотный влево или вправо массив этот массив будет оставаться плотным в ту же сторону. То же самое справедливо для действия горизонтальных операций на массив, который плотен вниз или вверх. Поэтому любой массив можно сделать плотным одновременно в каком-нибудь вертикальном и в каком-нибудь горизонтальном направлении. Мы будем называть такие массивы DL-плотными, DR-плотными, и т. п. Поскольку далее мы будем заниматься в основном DL-уплотнениями, условимся называть просто биplotными массивы, плотные одновременно вниз и влево. Все шары в биplotном массиве лежат лишь в клетках главной диагонали  $i = j$ , причём их количества нестрого убывают с ростом  $i$ . Поэтому столбцовый вес биplotного массива равен строчному и представляет собой диаграмму Юнга

$\lambda = w^l(b) = w^r(b)$ , т. е. биплотные массивы  $b$  взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга<sup>1</sup>. Диаграмма Юнга, отвечающая биплотному массиву, который получается DU-уплотнением данного массива  $a$ , называется *формой* массива  $a$  и обозначается  $\Phi(a)$ . Докажем теперь, что это понятие корректно.

**Предложение 4.1**

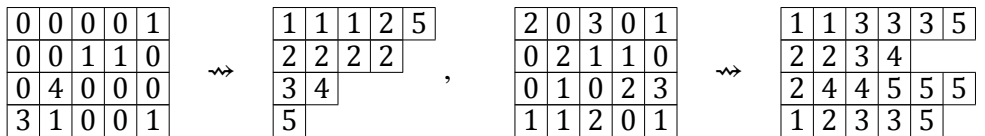
Результат D-, L-, R- или U-уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.

**Доказательство.** Мы рассмотрим только случай D-уплотнения. Если массив  $a$  плотен влево, то результат его D-уплотнения — это биплотный массив, отвечающий диаграмме Юнга  $w^l(a)$ . Поскольку  $w^l(a)$  не меняется при вертикальных уплотняющих операциях, результат D-уплотнения L-плотного массива не зависит от способа уплотнения. Пусть теперь  $a$  произволен. Зафиксируем какое-нибудь слово  $L = L_{i_1} L_{i_2} \dots L_{i_k}$ , эффективно уплотняющее  $a$  влево до L-плотного массива  $a' = La$ . Тогда для любого слова  $D = D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_k}$ , такого что  $Da$  плотен вниз, действие  $L$  на  $Da$  тоже будет эффективным, а массив  $LDa = DLa$  будет биплотен (поскольку применение  $L$  сохраняет свойство массива  $Da$  быть плотным вниз, а применение  $D$  сохраняет свойство массива  $La$  быть плотным влево). Таким образом, мы можем записать  $Da$  как  $L^{-1}DLa$ . Так как массив  $DLa$ , по уже доказанному, не зависит от выбора уплотняющего слова  $D$  (ибо  $DLa$  есть D-уплотнение L-плотного массива  $La$ ), массив  $Da = L^{-1}DLa$  тоже не зависит от выбора  $D$ . □

**4.2.2. Плотные массивы и таблицы Юнга.** Из любого массива высоты  $m$  и ширины  $n$  можно изготовить  $m$  слов (по одному слову из каждой строки массива), записанных алфавитом  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Делается это при помощи процедуры, которая называется *строчной развёрткой* массива и состоит в следующем. Интерпретируем все шарики массива как буквы, равные номеру того столбца, где стоит шарик. После этого пройдём по каждой строке слева направо, выписывая подряд все встречающиеся нам буквы. В результате  $j$ -тая строка массива развернётся в слово

$$\underbrace{11 \dots 1}_{a(1,j)} \underbrace{22 \dots 2}_{a(2,j)} \dots \dots \dots \underbrace{nn \dots n}_{a(n,j)} .$$

Получающиеся  $m$  слов запишем друг под другом в столбик, *сверху вниз*<sup>2</sup>, выровняв их по левому краю. Например:



<sup>1</sup>здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем между собою две конечных последовательности неотрицательных целых чисел, получающиеся одна из другой приписыванием справа любого числа нулей; например, мы считаем равными диаграммы (2, 1, 1) и (2, 1, 1, 0, 0, 0)

<sup>2</sup>таким образом из нижней строки массива получается верхнее слово и т. д.

Очевидно, что буквы в каждом слове строчной развёртки нестрого возрастают. Условие плотности массива вниз (как в левом примере выше) означает, что под каждой буквой « $i$ » в  $j$ -том слове (т. е. под шариком, пришедшим из клетки  $a(i, j)$ ) стоит строго большая, чем « $i$ », буква  $(j + 1)$ -го слова (партнёр этого шарика при устойчивом паросочетании между  $j$ -той и  $(j + 1)$ -ой строками массива). Следовательно, длины слов строчной развёртки плотного вниз массива нестрого убывают сверху вниз, т. е. образуют диаграмму Юнга, а буквы  $\{1, 2, \dots, n\}$  заполняют эту диаграмму нестрого возрастаая по строкам и *строго* возрастаая по столбцам. Такие заполнения данной диаграммы  $\lambda$  называются *таблицами Юнга* формы  $\lambda$  на алфавите  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Мы доказали следующий комбинаторный факт:

ЛЕММА 4.2

Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными вниз массивами размера  $m \times n$  и таблицами Юнга из  $\leq m$  строк на алфавите  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  $\square$

**4.2.3. Плотные массивы и тексты Яманучи.** L-плотность массива  $a$  можно воспринимать как D-плотность транспонированного массива  $a^t$  и формулировать в терминах столбцовой развёртки: плотные влево массивы биективно соответствуют таблицам Юнга из  $\leq n$  строк в алфавите  $J$ . Полезно, однако, охарактеризовать L-плотность и в терминах строчной развёртки. Для этого будем читать слова *строчной* развёртки L-плотного массива  $a$  *справа налево* одно за другим, сверху вниз. Условие плотности влево означает тогда, что в любом начальном куске получающейся последовательности букв единиц будет не меньше, чем двоек, двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для всех пар последовательных букв « $i$ » и « $(i + 1)$ » из  $I$ . В комбинаторике такой текст называют *текстом Яманучи*. Например, левая из двух строчных развёрток

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

является текстом Яманучи, а правая — нет. Итак, нами установлена

ЛЕММА 4.3

Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными влево массивами размера  $m \times n$  и текстами Яманучи из  $\leq m$  слов на алфавите  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  $\square$

**4.2.4. Послойное произведение.** Дизъюнктное объединение прямых произведений слоёв отображений множеств  $\varphi : X \rightarrow Z$  и  $\psi : Y \rightarrow Z$  над всеми точками  $z \in Z$  обозначается

$$X \times_Z Y \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{z \in Z} \varphi^{-1}(z) \times \psi^{-1}(z)$$

и называется *послойным* (или *расслоенным*) произведением множеств  $X$  и  $Y$  над  $Z$ . Послойные проекции  $\pi_X : (x, y) \mapsto x$  и  $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$  включаются в коммутативную

диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times Y & \\
 \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\
 X & & Y \\
 \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\
 & Z &
 \end{array} \quad (4-6)$$

которая называется *декартовым квадратом*. Она универсальна в том смысле, что для любого другого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 \xi \swarrow & & \searrow \eta \\
 X & & Y \\
 \varphi \searrow & & \swarrow \psi \\
 & Z &
 \end{array}$$

имеется единственное отображение  $\alpha : M \rightarrow X \times_Z Y$ , такое что  $\xi = \pi_X \circ \alpha$  и  $\eta = \pi_Y \circ \alpha$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 4.2.** Убедитесь в этом и покажите, что универсальное свойство определяет верхний угол квадрата (4-6) однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми стрелками квадрата.

#### ТЕОРЕМА 4.1

Множество всех массивов  $\mathcal{M}$  является послойным произведением множеств плотных влево массивов  $\mathcal{L}$  и плотных вниз массивов  $\mathcal{D}$  над множеством биplotных массивов  $\mathcal{B}$ , т. е. коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M} & \\
 L \swarrow & & \searrow D \\
 \mathcal{L} & & \mathcal{D} \\
 D \searrow & & \swarrow L \\
 & \mathcal{B} &
 \end{array}$$

в котором стрелки  $L$  и  $D$  переводят массив в его уплотнения влево и вниз, является декартовым.

**Доказательство.** По [предл. 4.1](#) стрелки  $L$  и  $D$  корректно определены и перестановочны друг с другом. Мы должны показать, что отображение  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$ , сопоставляющее массиву  $a$  пару  $(La, Da)$  со свойством  $DLa = LDa \in \mathcal{B}$  взаимно однозначно. Сначала установим его инъективность. Пусть массивы  $a$  и  $a'$  таковы, что  $La = La'$  и  $Da = Da'$ , и пусть слово  $\Lambda$  эффективно уплотняет массив  $Da = Da'$  влево. Тогда  $\Lambda$  эффективно действует на  $a$  и  $a'$  так, что  $\Lambda a = La = La' = \Lambda a'$ , откуда  $a = \Lambda^{-1}La = \Lambda^{-1}La' = a'$ . Теперь докажем сюръективность. Для любой пары массивов  $(a_\ell, a_d)$ , в

которой  $a_\ell$  плотен влево,  $a_d$  плотен вниз, и  $Da_\ell = La_d$ , рассмотрим слово  $\Lambda$ , эффективно уплотняющее  $a_d$  влево до  $La_d$ . Обратное слово  $\Lambda^{-1}$  эффективно действует на  $La_d = Da_\ell$ , а значит, и на  $a_\ell$ . Массив  $a = \Lambda^{-1}a_\ell$  таков, что  $La = a_\ell$  и  $Da = D\Lambda^{-1}a_\ell = \Lambda^{-1}Da_\ell = \Lambda^{-1}La_d = a_d$ .  $\square$

ПРИМЕР 4.1 (ГРАФИКИ ОТОБРАЖЕНИЙ И СТАНДАРТНЫЕ ТАБЛИЦЫ)

График отображения множеств  $a : I \rightarrow J$  — это массив, в каждом столбце которого имеется ровно один шарик. По [теор. 4.1](#) такие массивы взаимно однозначно параметризуются парами  $(a_\ell, a_d)$  в которой  $a_\ell$  плотен влево,  $a_d$  плотен вниз, причём оба этих массива имеют одинаковую форму  $Da_\ell = La_d$ , и  $w^I(a_d) = (1, 1, \dots, 1)$ . По [п° 4.2.2](#) каждая такая пара однозначно описывается следующим набором данных:

- форма  $\Phi(a)$  массива  $a$ , представляющая собою диаграмму Юнга  $\lambda = DLa = LDa$  веса  $|\lambda| = n$
- строчная развёртка D-уплотнения  $a_d$  массива  $a$ , представляющая собою таблицу Юнга формы  $\lambda$  на алфавите  $I$ , в которой каждая буква используется ровно один раз.
- столбцовая развёртка L-уплотнения<sup>1</sup>  $a_\ell$  массива  $a$ , представляющая собою таблицу Юнга формы  $\lambda$  на алфавите  $J$

Число всех таблиц Юнга формы  $\lambda$  на  $m$ -буквенном алфавите принято обозначать через  $d_\lambda(m)$ . Таблицы формы  $\lambda$  заполненные без повторений числами от 1 до  $|\lambda|$  называются *стандартными таблицами* формы  $\lambda$ , и их число обозначается просто через  $d_\lambda$ . Так как всего имеется  $m^n$  отображений  $I \rightarrow J$ , мы получаем соотношение

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda} \cdot d_{\lambda}(m) = m^n, \quad (4-7)$$

где суммирование идёт по всем  $n$ -клеточным диаграммам Юнга и числа  $d_{\lambda}(m)$  отличны от нуля только для диаграмм из  $\leq m$  строк.

В ситуации, когда  $\#J = \#I = n$  и рассматриваются только взаимно однозначные отображения  $I \simeq J$ , предыдущая конструкция устанавливает биекцию между  $n!$  элементами симметрической группы  $S_n$  и парами стандартных таблиц одинаковой формы веса  $n$ , откуда

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda}^2 = n!, \quad (4-8)$$

где сумма идёт о всем  $n$ -клеточным диаграммам. Эта биекция индуцирует взаимно однозначное соответствие между инволютивными перестановками<sup>2</sup>  $\sigma \in S_n$  в самосопряжёнными массивами  $a = a^t$ , которым в по [теор. 4.1](#) отвечают пары одинаковых стандартных таблиц. Поэтому

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda} = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\}. \quad (4-9)$$

<sup>1</sup>т. е. строчная развёртка транспонированного массива  $a_\ell^t$

<sup>2</sup>т. е. такие, что  $\sigma^2 = 1$



**4.3. Действие симметрической группы на DU-множествах.** Будем называть *DU-множеством* всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями  $D$  и  $U$ . Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций  $D$  и  $U$ . DU-множество, на котором операции  $D$  и  $U$  действуют транзитивно, будем называть *DU-орбитой*. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита  $O$  такого массива  $a_d$  состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из  $a_d$  эффективными  $U$ -словами. Мы будем называть  $a_d$  *нижним концом орбиты  $O$* .

**Лемма 4.4**

Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. Всякое DU-множество является дизъюнктивным объединением DU-орбит.

**Доказательство.** Не вполне очевидно, разве что, утверждение про разности. Пусть  $A'$  и  $A''$  DU-инвариантны и  $a' \in A' \setminus A''$ . Если  $D_j a' \in A''$ , то  $D_j$  действует эффективно, и тогда  $a' = U_j D_j a'$  тоже лежит в  $A''$ .  $\square$

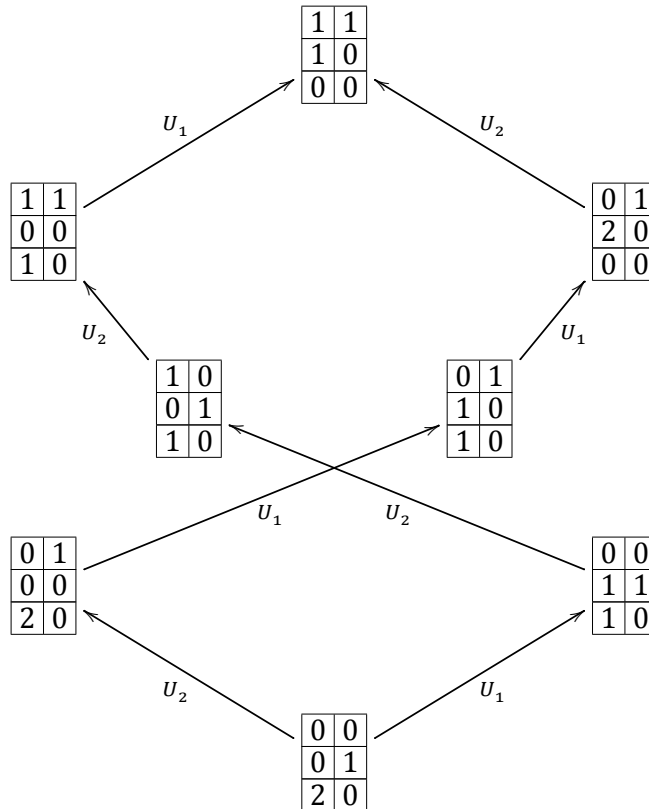


Рис. 4♦3. Стандартная DU-орбита  $O_{(2,1)}$ .

**4.3.1. Стандартные орбиты.** DU-орбиты  $O_\lambda$  биplotных массивов  $\lambda$  называются *стандартными*. Например, при  $t = 3$  стандартная орбита  $O_{(2,1)}$ , отвечающая диа-

грамме – таблице – массиву

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

состоит из восьми массивов, представленных на рис. 4♦3.

Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты  $O$  со стандартной орбитой  $O_\lambda$ , нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты  $O$ . Мы будем называть  $\lambda$  *типом* орбиты  $O$ . Количество орбит типа  $\lambda$  в данном DU-множестве  $M$  равно количеству плотных вниз массивов строчного веса  $\lambda$ , имеющихся в  $M$ .

**4.3.2. Действие симметрической группы  $S_m = \text{Aut}(\mathcal{J})$ .** На каждом DU-множестве массивов  $M$  имеется действие элементарных транспозиций  $\sigma_j = (j, j+1)$ , порождающих симметрическую группу  $S_m$ , переставляющую строки массива. Оно определяется следующим образом.

Пусть в  $j$ -той и  $(j+1)$ -ой строках после установления между ними устойчивого паросочетания образовалось, соответственно,  $s_j$  и  $s_{j+1}$  свободных шаров. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j-s_{j+1}}. \quad (4-10)$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу  $n$ -того столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно  $|s_{j+1} - s_j|$  свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция  $\sigma_j$  просто передвигает их по вертикали в другую строку (или ничего не делает, если  $s_j = s_{j+1}$ ). В частности, действие  $\sigma_j$  на строчный вес  $w^J$  состоит в перестановке  $j$ -той и  $(j+1)$ -ой координаты.

Из предыдущего описания видно, что  $\sigma_j^2 = \text{Id}$ , а также, что  $\sigma_j$  коммутирует с циклическими перестановками столбцов. Очевидно также, что  $\sigma_j$  перестановочна с горизонтальными операциями  $R, L$  и со всеми  $\sigma_k$  с  $|k - j| \geq 2$ . Чтобы действие  $\sigma_j$  непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу  $S_m$  достаточно проверить соотношение треугольника  $\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}$ . При этом можно считать массив трёхстрочным. Левое уплотнение  $L$  и циклическая перестановка столбцов  $C$  превращает любой трёхстрочный массив в одностолбцовый:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & c & a \\ \hline e & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & f \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|} \hline g & h & 0 \\ \hline k & 0 & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|} \hline h & g \\ \hline 0 & k \\ \hline 0 & f \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|} \hline \ell & 0 \\ \hline k & 0 \\ \hline f & 0 \\ \hline \end{array}$$

на который  $\sigma_j$  и  $\sigma_{j+1}$  действуют перестановками строк, и соотношение треугольника, таким образом, выполняется.

**4.4. Полиномы Шура.** Интерпретируем все шарики из  $j$ -той строки как переменные  $x_j$  и сопоставим каждому массиву  $a$  моном  $x^a \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{w_1^j(a)} x_2^{w_2^j(a)} \dots x_m^{w_m^j(a)}$ , получающийся

перемножением всех его шариков. Сумма этих мономов по всем массивам данного DU-множества  $M$  обозначается

$$s_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in M} x^a \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_m]$$

и называется *многочленом Шура* DU-множества  $M$ . Симметрическая группа  $S_m$  переставляет координаты весового вектора и действует на мономы  $x^a$  перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество  $M$  является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите  $O_\lambda$ , произвольный полином Шура является линейной комбинацией с неотрицательными целыми коэффициентами *стандартных* многочленов Шура  $s_\lambda(x)$ , отвечающих биplotным массивам (диаграммам Юнга)  $\lambda$ :

$$s_M(x) = \sum_{\lambda \in \Phi(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x), \quad (4-11)$$

где суммирование происходит по всем формам  $\lambda$  массивов из  $M$ , и коэффициент  $c_M^\lambda$  равен числу DU-орбит, изоморфных  $O_\lambda$ , т. е. количеству всех плотных вниз массивов  $J$ -веса  $\lambda$  в  $M$ . Согласно н° 4.2.2, элементы стандартной орбиты  $O_\lambda$  суть всевозможные  $L$ -плотные массивы формы  $\lambda$ , и столбцовая развёртка устанавливает биекцию между такими массивами и таблицами Юнга формы  $\lambda$  в алфавите  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Таким образом, стандартный полином Шура имеет вид

$$s_\lambda(x) = \sum_{\eta} K_{\lambda, \eta} \cdot x^\eta = \sum_{\eta} K_{\lambda, \eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \dots x_m^{\eta_m}, \quad (4-12)$$

где  $\eta \in \mathbb{Z}_{>0}^m$  пробегает  $m$ -мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент  $K_{\lambda, \eta}$  равен числу таблиц формы  $\lambda$ , заполненных  $\eta_1$  единицами,  $\eta_2$  двойками и т. д. Мы будем говорить, что такая таблица имеет *состав*  $\eta$ .

Например, при  $m = 3$  из представленной на рис. 4♦3 схемы получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

Число  $K_{\lambda, \eta}$  таблиц формы  $\lambda$  и состава  $\eta$  называется *числом Костки*. Отметим, что  $K_{\lambda, (1^{|\lambda|})} = d_\lambda$  равно числу стандартных таблиц формы  $\lambda$ , все  $K_{\lambda, \lambda} = 1$ , и  $K_{\lambda, \eta} \neq 0$  только когда при каждом  $j = 1, 2, 3, \dots$  выполняются неравенства

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_j \quad \forall j. \quad (4-13)$$

В этой ситуации говорят, что диаграмма  $\lambda$  *доминирует* вектор  $\eta$  и пишут  $\lambda \supseteq \eta$ .

**Упражнение 4.3.** Покажите, что отношение доминирования задаёт на множестве диаграмм Юнга заданного веса  $n$  частичный порядок, полный при  $n \leq 5$ , и приведите пример двух несравнимых между собою диаграмм Юнга веса 6.

Из формулы (4-12) вытекает, что стандартные многочлены Шура  $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , где  $\lambda$  пробегает все диаграммы Юнга из не более, чем  $m$  строк, выражаются через базисные мономиальные симметрические многочлены  $m_\mu$  при помощи нижней унитарной матрицы

$$s_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} K_{\lambda, \mu} \cdot m_\mu. \quad (4-14)$$

Поскольку такая матрица обратима над  $\mathbb{Z}$ , многочлены  $s_\lambda$  тоже образуют базис  $\mathbb{Z}$ -модуля симметрических функций.

ПРИМЕР 4.2 (полные и элементарные симметрические многочлены)

Многочлен Шура  $s_{(k)}(x)$ , отвечающий DU-орбите одностолбцового массива, т. е. диаграммы-строки

$$\lambda = (k, 0, \dots, 0) = \underbrace{\square \square \dots \square \square}_{k},$$

представляет собой *полный симметрический многочлен*  $h_k(x)$  — сумму всех мономов общей степени  $k$  от  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , поскольку для любого содержания  $\eta$  веса  $|\eta| = k$  имеется ровно одна однострочная таблица, в которой все координаты выстроены монотонно<sup>1</sup>. Симметричным образом,  $s_{(1^k)}$ , отвечающий DU-орбите диаграммы-столбца

$$1^k = (1, 1, \dots, 1) = \left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} k$$

это *элементарный симметрический многочлен*  $e_k(x)$ , т. е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени  $k$  от  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Причина та же, только теперь номера переменных в таблице-столбце должны строго возрастать.

ПРИМЕР 4.3 (тождества Коши и Шура.)

Проинтерпретируем каждый шарик в клетке  $(i, j)$  массива  $a$  как билинейный моном  $x_i y_j$  от двух наборов переменных  $x = x^I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = y^J = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ . Перемножая вместе все шарики массива  $a$ , мы получим (в обозначениях н° 4.4) моном  $x^{a^t} y^a$ . По теореме о биекции из теор. 4.1 сумма таких мономов по всем массивам  $a$  фиксированной формы  $\lambda = \Phi(a)$  равна произведению многочленов Шура  $s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$ , и значит сумма мономов  $x^{a^t} y^a$  по вообще всем массивам  $a$  формата  $I \times J$  равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга  $\lambda$ .

С другой стороны, сумма всех мономов  $x^{a^t} y^a$  по всем массивам  $a$  получается при раскрытии скобок в произведении бесконечных геометрических прогрессий

$$\prod_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \dots)$$

(выбирая из  $(i, j)$ -того сомножителя слагаемое  $(x_i y_j)^{a(i, j)}$  мы получаем в точности моном  $x^{a^t} y^a$ , отвечающий массиву  $a$ ). Таким образом, мы приходим к *тождеству Коши*:

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) \cdot s_{\lambda}(y) = \prod_{i, j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \quad (4-15)$$

<sup>1</sup>эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса  $k$  образована всеми возможными расположениями  $k$  шариков по  $t$  ящикам

Если взять  $I = J$ , ограничиться только симметричными массивами  $a = a^t$ , положить  $x = y = \xi$  и извлечь из каждого  $a$ -монома корень

$$\xi^a = \sqrt{\xi^{at} \xi^a} = \sqrt{x^{at} y^a} \Big|_{x=y=\xi},$$

то, суммируя по всем симметричным массивам  $a$  заданной формы  $\lambda$ , мы получим  $s_\lambda(\xi)$ , а суммируя по вообще всем симметричным массивам  $a$  — сумму  $\sum_\lambda s_\lambda(\xi)$ . Тот же результат получится при раскрытии скобок в произведении прогрессий

$$\prod_k (1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \dots) \cdot \prod_{i < j} (1 + \xi_i \xi_j + (\xi_i \xi_j)^2 + (\xi_i \xi_j)^3 + \dots).$$

Мы получаем *тождество Шура*:

$$\sum_\lambda s_\lambda(\xi) = \prod_i \frac{1}{1 - \xi_i} \cdot \prod_{i < j} \frac{1}{1 - \xi_i \xi_j}. \quad (4-16)$$

**4.5. Правило Литтлвуда – Ричардсона.** Произведение полиномов Шура  $s_M(x) \cdot s_N(x)$  DU-множеств  $M$  и  $N$  является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида  $ab$  размера  $(2n) \times m$ , получающихся приписыванием какого-нибудь массива  $b \in N$  справа к какому-нибудь массиву<sup>1</sup>  $a \in M$ . Множество таких массивов естественно обозначить через  $M \otimes N$  и называть *тензорным произведением* DU-множеств  $M$  и  $N$ . Итак,

$$s_M(x) \cdot s_N(x) = \left( \sum_{a \in M} x^a \right) \cdot \left( \sum_{b \in N} x^b \right) = \sum_{\substack{a \in M \\ b \in N}} x^{ab} = \sum_{c \in M \otimes N} x^c.$$

Разложение произведения  $s_\lambda s_\mu$  стандартных полиномов Шура по базису  $s_\nu$  даёт

**ТЕОРЕМА 4.2 (ПРАВИЛО ЛИТТЛВУДА – РИЧАРДСОНА)**

$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu \cdot s_\nu$ , где суммирование происходит по всем диаграммам  $\nu$ , получающимся добавлением  $|\mu|$  клеток к диаграмме  $\lambda$ , а коэффициент  $c_{\lambda\mu}^\nu$  равен количеству таких заполнений этих дописанных клеток  $\mu_1$  единицами,  $\mu_2$  двойками,  $\mu_3$  тройками и т. д., что вдоль строк «косой диаграммы»  $\nu \setminus \lambda$  числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно текст, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (т. е. является тестом Яманучи<sup>2</sup>).

**Доказательство.** Мы должны подсчитать в DU-множестве  $O_\lambda \otimes O_\mu$  количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты  $O_\nu$ . Пусть массив  $ab$  лежит

<sup>1</sup>при этом вертикальный  $J$ -алфавит не меняется, а горизонтальный  $I$ -алфавит заменяется дизъюнктивным объединением  $I$ -алфавитов массивов  $a$  и  $b$

<sup>2</sup>см. п. 4.2.3 на стр. 48

в такой орбите. Поскольку массивы  $a, b$  получены из биплотных массивов  $\lambda, \mu$  вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют  $I$ -веса  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно. Заметим, что действие вертикальной уплотняющей операции  $D_j$  на «толстый» массив  $ab$  состоит либо в её действии отдельно на<sup>1</sup>  $b$ , либо в её действии отдельно на<sup>2</sup>  $a$ . Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива  $ab$  мы получим массив вида  $a'b'$ , в котором  $a'$  плотен вниз, и оба массива  $a', b'$  по прежнему плотны влево и имеют  $I$ -веса  $\lambda, \mu$ . Таким образом,  $a'$  биплотен формы  $\lambda$ . Если форма массива  $a'b' = \lambda b'$  равна  $\nu$ , то строки горизонтальной развёртки массива  $b'$  — это выровненные по левому краю строки «косой таблицы»  $\nu \setminus \lambda$ , заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда – Ричардсона: первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива  $ab$ , а второе, «текстовое», ограничение выражает, согласно н° 4.2.3, плотность влево массива  $b'$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 4.4.** Пользуясь правилом Литтлвуда – Ричардсона вычислите в  $\Lambda_3$  произведения  $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$  и  $s_{2,1}^2$ . В частности, убедитесь непосредственно, что в первом случае «честное» и «халявное» вычисления<sup>3</sup> дают одинаковые ответы.

**УПРАЖНЕНИЕ 4.5 (ФОРМУЛЫ ПЬЕРИ).** Выведите из правила Литтлвуда-Ричардсона формулы Пьери для умножения полиномов Шура на элементарные и полные симметрические многочлены:

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum_{\mu} s_{\mu} \quad (4-17)$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum_{\nu} s_{\nu} \quad (4-18)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  пробегают все диаграммы, которые можно получить приписыванием  $k$  новых клеток к диаграмме  $\lambda$  так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку  $\mu$  и в один столбец  $\nu$ .

**4.5.1. Тожество Якоби – Труднн.** Из формулы Пьери (4-18) и формулы Пьери из сл. 3.6 на стр. 40 вытекает, что детерминантные полиномы Шура  $\Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_{\delta}$  из предыдущего параграфа и комбинаторные полиномы Шура  $s_{\lambda}$  стандартных DU-орбит — это одни и те же полиномы. В самом деле, формулы Пьери позволяют однозначно выразить все многочлены Шура через многочлены  $h_k$ . Например, согласно (4-18)

$$\begin{aligned} s_{(2,2,1)} &= s_{(2,2)}h_1 - s_{(3,2)} \\ s_{(3,2)} &= s_{(3)}h_2 - s_{(5)} - s_{(4,1)} = h_3h_2 - h_5 - s_{(4,1)} \\ s_{(2,2)} &= s_{(2)}h_2 - s_{(3,1)} - s_{(4)} = h_2^2 - h_4 - s_{(3,1)} \\ s_{(4,1)} &= s_{(4)}h_1 - s_{(5)} = h_4h_1 - h_5 \\ s_{(3,1)} &= s_{(3)}h_1 - s_{(4)} = h_3h_1 - h_4 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива  $ab$  лежит в  $b$ , то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри  $b$

<sup>2</sup>если в  $b$  нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива  $ab$

<sup>3</sup>т. е. применяющее правило теор. 4.2 не к  $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ , а к  $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$ , что не всё равно

откуда<sup>1</sup>  $s_{(2,2,1)} = -h_3 h_2 + h_4 h_1 + h_1(h_2^2 - h_1 h_3)$ . В общем случае, оставляя в правой части формулы (4-18) диаграмму с самой длинной нижней строкой среди всех диаграмм с наибольшим количеством строк, мы выражаем её через  $h_k$  (где  $k$  равно длине этой нижней строки) и диаграммы, имеющие то же число строк, но более короткую нижнюю строчку, или строго меньшее число строк. Далее используем убывающую индукцию по количеству строк диаграммы Юнга и длине её нижней строки.

Совпадение детерминантного и комбинаторного описания полиномов Шура называется *тождеством Якоби – Труды*.

**4.5.2. Выражение  $e_\lambda$  и  $h_\lambda$  через  $s_\lambda$ .** Напомним, что для диаграммы Юнга  $\mu$  мы обозначаем через  $m_i$  количество строк длины  $i$  в этой диаграмме и полагаем

$$e_\mu = e_{\mu_1} e_{\mu_2} \cdots e_{\mu_r} = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n} \quad (4-19)$$

$$h_\mu = h_{\mu_1} h_{\mu_2} \cdots h_{\mu_r} = h_1^{m_1} h_2^{m_2} \cdots h_n^{m_n}. \quad (4-20)$$

Многочлены (4-19) и (4-20) называются, соответственно, *элементарными* и *полными симметрическими* многочленами. Отметим, что при  $k \in \mathbb{N}$

$$e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{и} \quad h_k(x) = s_{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Произвольный многочлен  $h_\eta = s_{(\eta_1)} s_{(\eta_2)} \cdots s_{(\eta_r)}$  представляет собою полином Шура DU-множества  $O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_2)} \otimes \cdots \otimes O_{(\eta_r)}$ . Орбиты формы  $\nu$  в этом множестве биективно соответствуют своим нижним концам, которые в свою очередь, взаимно однозначно описываются таблицами формы  $\nu$  и содержания  $\eta$ . Тем самым,

$$h_\eta = \sum_{\nu} K_{\nu, \eta} \cdot s_{\nu}. \quad (4-21)$$

Произвольный многочлен  $e_\eta = s_{(1^{\eta_1})} s_{(1^{\eta_2})} \cdots s_{(1^{\eta_r})}$  представляет собою многочлен Шура DU-множества  $O_{(1^{\eta_1})} \otimes O_{(1^{\eta_2})} \otimes \cdots \otimes O_{(1^{\eta_r})}$ , каждый массив в котором имеет  $|\eta|$  столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы  $a_1 a_2 \dots a_r$  ширины  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ , причём в каждом столбце находится ровно один шар, и  $j$ -номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива  $a_i$ . При уплотнении вниз последнее свойство сохранится, и в результате такого уплотнения мы получим массив  $a'_1 a'_2 \dots a'_r$  в котором шары каждого подмассива  $a'_i$  располагаются в разных строках, номера которых строго возрастают слева направо. Тем самым, каждый подмассив  $a'_i$  внесёт не более одного шара в каждую компоненту  $J$ -веса. Если суммарный  $J$ -вес при этом получится  $\nu$ , то записывая в каждую строку диаграммы  $\nu$  последовательно номера  $i$  тех подмассивов  $a'_i$ , которые дают вклад в эту компоненту  $J$ -веса, мы получим таблицу содержания  $\eta$  и формы  $\nu^t$ , сопряжённой<sup>2</sup> к форме  $\nu$ : в силу вышесказанного номера будут строго возрастать по строкам диаграммы  $\nu$ , а поскольку массив плотен вниз, они также должны не строго возрастать по столбцам; кроме того, по построению, каждый номер  $i$  будет представлен ровно в  $\eta_i$  различных строчках. Итак,

$$e_\eta = \sum_{\nu} K_{\nu^t, \eta} \cdot s_{\nu}. \quad (4-22)$$

<sup>1</sup>читателю рекомендуется проверить этот результат по формуле Джамбелли (3-25)

<sup>2</sup>или транспонированной, т. е. симметрично отражённой относительно главной диагонали

## СЛЕДСТВИЕ 4.2

Инволюция  $\omega$  из предл. 3.3, переводящая  $e_k$  и  $h_k$  друг в друга, действует на полиномы Шура по правилу  $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^t}$ , т. е. переводит друг в друга многочлены, отвечающие транспонированным диаграмм Юнга.

Доказательство. Так как многочлены  $s_\lambda$  образуют базис  $\mathbb{Z}$ -модуля симметрических функций, отображение  $s_\lambda \mapsto s_{\lambda^t}$  однозначно задаёт на модуле симметрических функций  $\mathbb{Z}$ -линейную инволюцию. Из формул (4-21) и (4-22) следует, что эта инволюция переводит  $e_k$  в  $h_k$  и наоборот, т. е. совпадает с  $\omega$ .  $\square$

## СЛЕДСТВИЕ 4.3 (ВТОРАЯ ФОРМУЛА ДЖАМБЕЛЛИ)

$$s_{\lambda^t} = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \cdots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \cdots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (4-23)$$

(по главной диагонали стоят  $e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \dots, e_{\lambda_n}$ , и при движении вдоль строк слева направо индексы у  $e$  с каждым шагом увеличиваются на единицу).  $\square$

Доказательство. Применяем инволюцию  $\omega$  к формуле Джамбелли (3-25).  $\square$

**4.6. Скалярное произведение** Введём на  $\mathbb{Z}$ -модуле симметрических функций  $\Lambda$  скалярное произведение  $\langle *, * \rangle$ , для которого базис из полиномов Шура  $s_\lambda$  является ортонормальным. Из формул (4-21) и (4-14)

$$h_\lambda = \sum_{\mu \geq \lambda} K_{\mu, \lambda} \cdot s_\mu, \quad s_\mu = \sum_{\lambda \geq \mu} K_{\mu, \lambda} \cdot m_\lambda$$

вытекает, что  $\langle h_\lambda, s_\mu \rangle = K_{\mu, \lambda} = \langle m_\lambda^*, s_\mu \rangle$ , где  $m_\lambda^*$  — базис, двойственный к  $m_\lambda$ . Таким образом,  $m_\lambda^* = h_\lambda$ , т. е. базисы  $h_\lambda$  и  $m_\lambda$  двойственны друг другу:

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}. \quad (4-24)$$

Из сл. 4.2 вытекает, что инволюция  $\omega$  является ортогональным оператором.

## ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2

Многочлены Ньютона  $p_\lambda$  составляют ортогональный базис пространства  $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$  симметрических функций с рациональными коэффициентами и имеют скалярные квадраты  $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda$ , где<sup>1</sup>  $z_\lambda = \prod_k (m_k! \cdot k^{m_k})$ .

<sup>1</sup>ср. с формулами (3-19) на стр. 36



Доказательство. Выразим произведение геометрических прогрессий в правой части тождества Коши (4-15) через функции Ньютона от наборов переменных  $x$  и  $y$  :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x)s_{\lambda}(y) &= \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \exp\left(\int_0^{y_j} P(t) dt\right) = \\ &= \exp\left(\sum_j \sum_k \frac{1}{k} p_k(x)y_j^k\right) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) = \prod_k \exp\left(\frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) = \\ &= \prod_k \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{\ell! \cdot k^{\ell}} (p_k(x)p_k(y))^{\ell} = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_{\lambda}} p_{\lambda}(x)p_{\lambda}(y) \end{aligned}$$



(переход в последнем равенстве тот же, что и в доказательстве равенства (3-21) на стр. 36). Если обозначить через  $C_{\lambda\mu} = \langle s_{\lambda}, p_{\mu} \rangle$  коэффициенты разложений Ньютоновских полиномов по базису из полиномов Шура, так что  $p_{\mu} = \sum_{\lambda} C_{\lambda\mu} s_{\lambda}$ , то подставляя эти разложения в правую часть полученного выше равенства и приравнявая коэффициенты при  $s_{\lambda}(x)s_{\eta}(y)$  в левой и правой части, получаем соотношения

$$\sum_{\nu} C_{\nu\lambda} C_{\nu\eta} = \begin{cases} z_{\lambda} & \text{при } \eta = \lambda \\ 0 & \text{при } \eta \neq \lambda \end{cases}$$

т. е. матрица Грама  $(\langle p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle) = C^t \cdot C$  диагональна с диагональными элементами  $z_{\lambda}$ .  $\square$

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. Устойчивое паросочетание между  $i$ -тым и  $(i + 1)$ -м столбцом устанавливается так: последовательно перебираем шарики в  $(i + 1)$ -ом столбце двигаясь снизу вверх и назначаем очередному шару  $\mathbf{ш}$  партнёром самый верхний шар  $i$ -того столбца, лежащий строго ниже  $\mathbf{ш}$  и ещё не назначенный никому партнёром, а если таких шаров нет, объявляем  $\mathbf{ш}$  свободным. После того, как все шары  $(i + 1)$ -го столбца разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары  $i$ -того столбца, не являющиеся ни чьими партнёрами, тоже объявляются свободными. Операция  $L_i$  перемещает на одну клетку влево самый верхний свободный шар  $(i + 1)$ -го столбца или ничего не делает, если свободных шаров в  $(i + 1)$ -ом столбце нет. Операция  $R_i$  перемещает на одну клетку вправо самый нижний свободный шар  $i$ -го столбца или ничего не делает, если в  $i$ -ом столбце нет свободных шаров.

Упр. 4.3. Диаграммы  и  несравнимы по отношению  $\succeq$ .

Упр. 4.4.  $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)} = s_{(2,1)} + s_{(1,1,1)} = s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$

Упр. 4.5. При вычислении  $s_\lambda \cdot e_k$  к диаграмме  $\lambda$  надо дописать  $k$  клеток без повторений заполненных числами от 1 до  $k$ , и если 2 из них попадают в одну строку, то возникает противоречие либо с табличным ограничением, либо с ограничением Яманучи. При вычислении  $s_\lambda \cdot h_k$  к диаграмме  $\lambda$  надо дописать  $k$  клеток заполненных единицами, никакие две из которых не могут попасть в один столбец в силу табличного ограничения.