

§5. Знакомство с теорией представлений.

5.1. Представления множества операторов. Для произвольного множества R условимся обозначать через $R \otimes \mathbb{k}$ векторное пространство с базисом R над полем \mathbb{k} , состоящее из всевозможных конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в \mathbb{k} , а через $A_R \stackrel{\text{def}}{=} T(R \otimes \mathbb{k})$ — тензорную алгебру этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную \mathbb{k} -алгебру, порождённую множеством R .

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t , векторное пространство $t \otimes \mathbb{k} = \mathbb{k} \cdot t$ одномерно, а ассоциативная алгебра $A_t \simeq \mathbb{k}[t]$ изоморфна алгебре многочленов от одной переменной¹.

Отображение множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-нибудь векторного пространства W

$$\varrho : R \rightarrow \text{End}(W) \tag{5-1}$$

называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами пространства W . В силу универсального свойства свободной алгебры A_R , линейные представления (5-1) биективно соответствуют гомоморфизмам алгебр

$$\tilde{\varrho} : A_R \rightarrow \text{End}(W). \tag{5-2}$$

Гомоморфизм (5-2) называется *линейным представлением* алгебры A_R в пространстве W . Пространство W с фиксированным отображением (5-1) или гомоморфизмом (5-2) называется R -модулем или A_R -модулем. И то, и то означает фиксацию для каждого $f \in R$ линейного оператора $\varrho(f) : W \rightarrow W$. Тензоры

$$f = \sum x_{f_1 f_2 \dots f_m} f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_m \in A_R$$

с $f_v \in R$ и $x_{f_1 f_2 \dots f_m} \in \mathbb{k}$ при этом представляются линейными операторами

$$\tilde{\varrho}(f) = \sum x_{f_1 f_2 \dots f_m} \varrho(f_1) \circ \varrho(f_2) \circ \dots \circ \varrho(f_m) : W \rightarrow W.$$

Образ гомоморфизма (5-2) состоит из всех операторов $W \rightarrow W$, которые можно получить, беря конечные линейные комбинации и композиции операторов, представляющих элементы множества R . Он называется *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \text{End}(W)$ и обозначается $\text{Ass}(\varrho(R)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{im } \tilde{\varrho}$. Когда понятно, о каком представлении ϱ идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\tilde{\varrho}(f)$, где $f \in A_R$, к вектору $w \in W$ просто через $f w$. Для подпространства $U \subset W$ и набора операторов $F \subset A_R$ мы полагаем $F U \stackrel{\text{def}}{=} \{f u \mid f \in F, u \in U\}$.

¹изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes t \otimes \dots \otimes t \in (\mathbb{k} \cdot t)^{\otimes n}$ моном t^n

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1 (РАЗЛОЖИМОСТЬ И (ПОЛУ) ПРОСТОТА)

Подпространство $U \subset W$ называется R -подмодулем¹, если $RU \subset U$. Как обычно, мы называем подмодуль U *собственным*, если он отличен от нуля и от всего W . Модуль называется *неприводимым*², если у него нет собственных подмодулей, *разложимым* — если он является прямой суммой собственных подмодулей, и *вполне приводимым*³ — если он является прямой суммой неприводимых подмодулей.

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и $A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость модуля W относительно множества операторов и относительно ассоциативной оболочки этих операторов означают одно и то же.

ПРИМЕР 5.1 (ПРОСТРАНСТВО С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ)

Если множество R состоит из одного элемента t , то $A_R \simeq \mathbb{k}[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \rightarrow \text{End } W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \rightarrow W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\tilde{\varrho} = \text{ev}_f : \mathbb{k}[t] \rightarrow \text{End}(W), \quad t \mapsto f, \quad (5-3)$$

переводящим многочлен $F \in \mathbb{k}[t]$ в результат подстановки в него оператора f вместо переменной t . Если пространство W конечномерно, гомоморфизм (5-3) имеет ненулевое ядро $\ker \text{ev}_f = (\mu_f)$, где μ_f — приведённый многочлен наименьшей степени, такой что⁴ $\mu_f(f) = 0$. Ассоциативная оболочка оператора f , т. е. образ гомоморфизма (5-3), представляет собою множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\mathbb{k}[t]/(\mu_f)$. По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов конечномерный $\mathbb{k}[t]$ -модуль W , будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_2^{m_2})} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_s^{m_s})}, \quad (5-4)$$

где все многочлены $p_i \in \mathbb{k}[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t , и два таких модуля изоморфны, если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. В частности, всякое неразложимое пространство с оператором изоморфно простран-

¹а также R -инвариантным подпространством

²или *простым*

³а также *полупростым*

⁴напомню, что он называется *минимальным многочленом* оператора f

ству $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ с оператором умножения на t , и два таких пространства с разными p или m не изоморфны друг другу.

УПРАЖНЕНИЕ 5.2. Убедитесь, что $\mathbb{k}[t]$ -модуль $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ неприводим, если и только если $m = 1$.

Тем самым, всякое неприводимое пространство с оператором изоморфно $\mathbb{k}[t]/(p)$, где $p \in \mathbb{k}[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t , а всякое полупростое — прямой сумме нескольких таких пространств.

УПРАЖНЕНИЕ 5.3. Докажите, что оператор f над произвольным полем \mathbb{k} диагонализуем тогда и только тогда, когда он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $\mathbb{k}[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей¹.

ПРИМЕР 5.2 (КОММУТИРУЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ)

Если все операторы из R коммутируют друг с другом, то каждое собственное подпространство любого оператора $f \in R$ является R -подмодулем, т. к. любой перестановочный с f оператор g переводит собственный для f вектор v с $fv = \lambda v$ в собственный вектор с тем же собственным числом: $f(gv) = g(fv) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Из этого наблюдения индукцией по $\dim V$ выводится, что над алгебраически замкнутым полем все операторы из R имеют в V общий собственный вектор: это так, если все операторы скалярны, если же хоть один из операторов не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство, которое является R -модулем размерности, меньшей $\dim V$, и по индукции в нём есть вектор, собственный для всех операторов из R .

Аналогично проверяется, что если все операторы из R диагонализуемы, то их можно диагонализировать одновременно в одном общем базисе. Для этого надо разложить V в прямую сумму собственных подпространств какого-нибудь не скалярного оператора $f \in R$. Такое разложение R -инвариантно, и по [упр. 5.3](#) ограничение каждого оператора из R на каждое собственное подпространство f диагонализуемо на этом подпространстве. Используя индукцию по размерности, мы одновременно диагонализуем все операторы из R на каждом прямом слагаемом.

СЛЕДСТВИЕ 5.1

Над алгебраически замкнутым полем все конечномерные простые модули над любым множеством коммутирующих операторов одномерны, и любой конечномерный модуль над множеством диагонализуемых коммутирующих операторов полупрост. \square

5.1.1. Гомоморфизмы представлений. Линейный оператор $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$ между R -модулями, заданными отображениями $\varrho_1 : R \rightarrow \text{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \rightarrow \text{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R -модулей², если он перестановочен с

¹в частности, если оператор диагонализуем на всём пространстве, то он диагонализуем и на любом своём инвариантном подпространстве

²а также сплетающим оператором или R -линейным отображением

действием всех операторов из R , т. е. если для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\varphi} & W_2 \\ \rho_1(f) \uparrow & & \uparrow \rho_2(f) \\ W_1 & \xrightarrow{\varphi} & W_2. \end{array}$$

Множество всех R -линейных гомоморфизмов обозначается через

$$\text{Hom}_R(W_1, W_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi : W_1 \rightarrow W_2 \mid \forall w \in W_1, \forall f \in R \varphi(fw) = f\varphi(w) \}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.4. Убедитесь, что $\text{Hom}_R(W_1, W_2) = \text{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$ является векторным подпространством в $\text{Hom}(W_1, W_2)$ и что композиции R -линейных отображений R -линейны, а ядро и образ гомоморфизма R -модулей являются R -подмодулями.

ЛЕММА 5.1 (ЛЕММА ШУРА)

Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R -модулей является изоморфизмом. Если основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, то все R -линейные эндоморфизмы неприводимого R -модуля скалярны, т. е. имеют вид $\lambda \cdot \text{Id}$, где $\lambda \in \mathbb{k}$.

Доказательство. Пусть представления $\rho_1 : R \rightarrow \text{End}(W_1)$ и $\rho_2 : R \rightarrow \text{End}(W_2)$ неприводимы и $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$ перестановочен со всеми операторами из R . Поскольку $\ker \varphi \subset W_1$ и $\text{im } \varphi \subset W_2$ являются R -подмодулями, оба они несобственные, и либо $\ker \varphi = W_1$, т. е. $\varphi = 0$, либо $\ker \varphi = 0$ и $\text{im } \varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq 0 \Rightarrow \text{im } \varphi = W_2$, т. е. φ инъективен и сюръективен. Если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, и $\varphi : W \rightarrow W$ является R -линейным автоморфизмом R -модуля W , то каждый из операторов $\lambda \cdot \text{Id}_W - \varphi$ с $\lambda \in \mathbb{k}$ тоже R -линеен и при некотором λ имеет ненулевое ядро. Так как W неприводим, оно совпадает со всем W . \square

СЛЕДСТВИЕ 5.2

Если основное поле алгебраически замкнуто, а R -модули U и W неприводимы, то

$$\dim \text{Hom}_R(U, W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi : U \simeq W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda \cdot \text{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{k}^*$. \square

5.2. Полупростые модули над ассоциативной алгеброй. Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем \mathbb{k} , а V — любое векторное пространство над \mathbb{k} . Всякий гомоморфизм \mathbb{k} -алгебр $\rho : A \rightarrow \text{End } V$, называется *линейным представлением* алгебры A в векторном пространстве V , и пространство V называется в этой ситуации A -модулем. Представления ассоциативных

алгебр являются специальными примерами представлений множеств операторов и к ним в полной мере приложима терминология из [опр. 5.1](#) на стр. 68. Для двух A -модулей U, W мы полагаем

$$\text{Hom}_A(U, W) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi : U \rightarrow W \mid \forall f \in A, \forall u \in U \varphi(fu) = f\varphi(u) \}$$

и называем такие отображения $\varphi : U \rightarrow W$ A -линейными.

УПРАЖНЕНИЕ 5.5. Пусть на пространстве V задан оператор π , удовлетворяющий уравнению $\pi^2 = \pi$. Покажите, что а) $V = \ker \pi \oplus \text{im } \pi$ и π проектирует V на $\text{im } \pi$ вдоль $\ker \pi$ б) если π является A -линейным гомоморфизмом, то подпространства $\ker \pi$ и $\text{im } \pi$ являются A -подмодулями в) для любого A -линейного проектора π оператор $1 - \pi$ является A -линейным проектором на $\ker \pi$.

Предложение 5.1 (критерии полупростоты)

Следующие свойства конечномерного¹ A -модуля W попарно эквивалентны:

- 1) W полупрост (т. е. является прямой суммой простых A -модулей)
- 2) W линейно порождается простыми подмодулями
- 3) $\forall A$ -подмодуля $U \subset W \exists A$ -подмодуль $V \subset W : W = U \oplus V$
- 4) $\forall A$ -подмодуля $U \subset W \exists \pi \in \text{End}_A(W) : \pi^2 = \pi$ и $\text{im } \pi = U$.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2) очевидна. Покажем, что (2) \Rightarrow (3). Пусть W линейно порождается набором простых подмодулей V_α . Тогда для любого подмодуля $U \subsetneq W$ можно выбрать из числа V_α такие подмодули V_1, V_2, \dots, V_m , что

$$W = U \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m.$$

А именно, возьмём в качестве V_1 произвольный неприводимый модуль, не содержащийся в U (таковой существует, поскольку $U \neq W$ и W линейно порождается простыми подмодулями). Так как подмодуль V_1 прост, пересечение $V_1 \cap U \subsetneq V_1$ нулевое. Поэтому сумма U и V_1 прямая. Если $U \oplus V_1 \neq W$, то повторяем рассуждение с заменой U на $U \oplus V_1$: выбираем неприводимый подмодуль $V_2 \not\subset U \oplus V_1$ и видим, что сумма U, V_1 и V_2 тоже прямая. Через конечное число шагов² получающаяся прямая сумма исчерпает всё пространство W . Отметим, что при $U = 0$ это же рассуждение доказывает импликацию (2) \Rightarrow (1).

Импликация (3) \Rightarrow (4) очевидна: проектор π_U модуля $W = U \oplus V$ на U вдоль V перестановочен с действием A . Импликация (4) \Rightarrow (1) доказывается индукцией по $\dim W$. Если $\dim W = 1$ или если W прост, доказывать нечего. Если W обладает собственным подмодулем $U \subsetneq W$, и $\pi : W \rightarrow U$ соответствующий

¹требование конечномерности не является здесь существенным, и преодолевается надлежащим применением леммы Цорна

²в бесконечномерном случае в этом месте следует применить лемму Цорна

проектор, то по [упр. 5.5](#) $W = U \oplus V$, где $V = \ker \pi$ тоже является A -подмодулем. Заметим теперь, что если свойство (4) выполняется в модуле W , то оно выполняется и во всех его подмодулях $M \subset W$, поскольку любой подмодуль $N \subset M$ является одновременно подмодулем в W , и ограничение на M A -линейного проектора $W \rightarrow N$ даёт A -линейный проектор $M \rightarrow N$. В частности, свойство (4) выполнено в U и в V . Поскольку их размерности строго меньше $\dim W$, по индукции, U и V являются прямыми суммами простых модулей. Поэтому $W = U \oplus V$ тоже является прямой суммой простых подмодулей. \square

Следствие 5.3

Прямые суммы, подмодули и фактор модули полупростых модулей также являются полупростыми модулями.

Доказательство. Прямая сумма полупростых модулей линейно порождается простыми подмодулями слагаемых. Каждое инвариантное подпространство в подмодуле полупростого модуля является образом A -инвариантного проектора. Фактор модуль полупростого модуля линейно порождается образами его простых подмодулей. По лемме Шура эти образы либо нулевые, либо изоморфны исходным простым подмодулям, т. е. тоже просты. \square

Упражнение 5.6. Покажите, что для любого векторного пространства V имеет место изоморфизм алгебр $\text{End}(V^{\oplus n}) \simeq \text{Mat}_n(\text{End}(V))$.

ТЕОРЕМА 5.1 (ТЕОРЕМА О ДВОЙНОМ ЦЕНТРАЛИЗАТОРЕ)

Пусть конечномерное¹ векторное пространство V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \text{End}(V)$. Обозначим через $B = \text{End}_A(V)$ алгебру всех операторов, перестановочных с подалгеброй² A . Тогда алгебра всех операторов, перестановочных с подалгеброй B , совпадает с A , т. е. $\text{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \text{End}_B(V)$ очевидно из определений. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис e_1, e_2, \dots, e_n и покажем, что для любого оператора $\varphi \in \text{End}_B(V)$ найдётся оператор $a \in A$, такой что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i . Отсюда сразу следует равенство $\varphi = a$.

Рассмотрим n -кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\text{End}_B(V)$, полагая $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = (f v_1, f v_2, \dots, f v_n)$. Обозначим вектор $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in W$ через e . Нам надо показать, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W является полупростым A -модулем, A -подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A -линейного проектора $\pi : W \rightarrow Ae$, тождественно действующего на самом Ae . Если π коммутирует с φ , то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Остаётся проверить, что π и в самом деле коммутирует с φ .

¹в этой теореме конечномерность уже существенна

²Подалгебра $\text{End}_A(V)$ называется *централизатором* подалгебры A в алгебре $\text{End}(V)$, чем и объясняется название теоремы. В англоязычной литературе подалгебру $\text{End}_A(V)$ иногда называют «commutator of A », а [теор. 5.1](#) — «double commutator theorem». В русском языке термин «коммутатор» в этом контексте никогда не используется.

Для этого, следуя [упр. 5.6](#), запишем действие эндоморфизма $\pi : V^{\oplus n} \rightarrow V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами¹ $\pi_{ij} \in \text{End}(V)$. Поскольку π перестановочен с действием A на W , каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V , т. е. лежит в $\text{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \text{End}_B(V)$, коммутирует с π . \square

Следствие 5.4 (теорема Бернсайда)

Пусть основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто. Если конечномерное пространство V неприводимо над множеством операторов $R \subset \text{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\text{Ass}(R) \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \rightarrow \text{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура² $\text{End}_{\text{Ass}(R)}(V) = \mathbb{k}$. По [теор. 5.1](#) $\text{End}_{\mathbb{k}}(V) = \text{Ass}(R)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 5.7. Покажите, что над любым полем \mathbb{k} верно и обратное: если $\text{Ass}(R) = \text{End}(V)$, то R -модуль V неприводим.

5.3. Изотипные компоненты. Зафиксируем простой A -модуль U и для любого A -модуля W зададим на тензорном произведении $\text{Hom}_A(U, W) \otimes U$ структуру A -модуля правилом $a(\varphi \otimes u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$ для всех $a \in A$. Каноническая свёртка

$$c : \text{Hom}_A(U, W) \otimes U \rightarrow W, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u), \quad (5-5)$$

является A -линейным гомоморфизмом. Её образ называется U -изотипной компонентой модуля W и обозначается $W_U \subset W$. Он равен сумме всех изоморфных U неприводимых подмодулей в W : поскольку всякий ненулевой гомоморфизм $\psi : U \rightarrow W$ инъективен, любой вектор вида $\sum \psi_i(u_i) \in W$ с $u_i \in U$ и $\psi_i \in \text{Hom}_A(U, W)$ лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, изоморфных U , и наоборот, если векторы $v_i \in \text{im } \psi_i$ лежат в образах A -линейных вложений $\psi_i : U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c(\sum \psi_i \otimes \psi_i^{-1}v_i)$.

Предложение 5.2

Всякий гомоморфизм A -модулей $\varphi : V \rightarrow W$ переводит U -изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U -изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Образ $\varphi(v)$ любого вектора вида $v = \sum \psi_i(u_i)$ с $\psi_i \in \text{Hom}_A(U, V)$ и $u_i \in U$ также имеет вид $\sum \varphi\psi_i(v)$ с $\varphi\psi_i \in \text{Hom}_A(U, W)$. \square

¹оператор $\pi_{ij} : V \rightarrow V$ задаёт проекцию на i -тое слагаемое суммы $V^{\oplus n}$ результата применения π к j -тому слагаемому этой суммы

²см. [лем. 5.1](#) на стр. 70

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} каноническая свёртка (5-5) инъективна, т. е. задаёт изоморфизм $c : \text{Hom}_A(U, W) \otimes U \simeq W_U$.

Доказательство. Поскольку модуль W_U линейно порождается простыми подмодулями, изоморфными U , он раскладывается в прямую сумму таких подмодулей:

$$W_U = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s. \quad (5-6)$$

Зафиксируем для каждого i вложение $\psi_i : U \hookrightarrow W$ с образом $\psi_i(U) = V_i$. Тогда $\text{Hom}_A(U, W) = \text{Hom}_A(U, W_U) = \bigoplus \text{Hom}_A(U, V_i)$ является по сл. 5.2 прямой суммой одномерных пространств $\mathbb{k} \cdot \psi_i$, порождённых вложениями ψ_i . Поэтому элементы модуля $\text{Hom}_A(U, W) \otimes U$ однозначно записываются в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$ с $u_i \in U$. Если

$$c \left(\sum \psi_i \otimes u_i \right) = \sum \psi_i(u_i) = 0,$$

то каждый из s векторов $\psi_i(u_i)$, лежащих в разных компонентах прямой суммы (5-6), равен нулю в отдельности, а поскольку все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4 (ИЗОТИПНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ)

Если A -модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U , совпадает с U -изотипной компонентой $W_U \subset W$. В частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и имеется каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus_U W_U, \quad (5-7)$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A -модулям U , для которых $\text{Hom}_A(U, W) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку $\text{Hom}_A(U, W) = \bigoplus \text{Hom}_A(U, V_i)$ и $\text{Hom}_A(U, V_j) = 0$ для всех $V_j \not\cong U$, образ канонической свёртки (5-5) лежит в сумме тех подмодулей V_i , что изоморфны U . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2

Для простого модуля U и полупростого модуля W целое неотрицательное число

$$m_U \stackrel{\text{def}}{=} \dim W_U / \dim U, \quad (5-8)$$

равное количеству изоморфных модулю U слагаемых любого разложения модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей, называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W .

Следствие 5.5

Для всех конечномерных полупростых A -модулей V, W над алгебраически замкнутым полем $\dim \text{Hom}_A(V, W) = \sum_U m_U(U) \cdot m_U(W) = \dim \text{Hom}_A(W, V)$, где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A -модулям U .

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus V_i$ и $W = \bigoplus W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\text{Hom}_A(V_i, W_j)$ нулевые при $V_i \not\cong W_j$ и одномерные при $V_i \cong W_j$. Поэтому $\text{Hom}_A(V, W) = \bigoplus_{ij} \text{Hom}_A(V_i, W_j)$ имеет размерность $\sum_U m_U(U) \cdot m_U(W)$ и то же самое верно для $\dim \text{Hom}_A(W, V)$. \square

5.4. Линейные представления групп. Действие группы G на векторном пространстве V линейными преобразованиями, т. е. гомоморфизм групп $\varrho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V . Пространство V называется в этом случае G -модулем. Прямая сумма, тензорное произведение, а также внешние и симметрические степени G -модулей U, W канонически наделяются такими структурами G -модулей, что операторы $g \in G$ действуют по правилам $g(u + w) \stackrel{\text{def}}{=} (gu) + (gw)$, $g(u \otimes w) \stackrel{\text{def}}{=} (gu) \otimes (gw)$, $g(u_1 \wedge u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (gu_1) \wedge (gu_2)$, $g(u_1 \cdot u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (gu_1) \cdot (gu_2)$ соответственно. Для любого G -подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является G -модулем с действием $g[v] \stackrel{\text{def}}{=} [gv]$.

Упражнение 5.8. Убедитесь, что эти правила корректно задают гомоморфизмы группы G в $\text{GL}(U \oplus W)$, $\text{GL}(U \otimes W)$, $\text{GL}(\Lambda(U))$, $\text{GL}(S(U))$ и $\text{GL}(W/V)$ соответственно.

Для каждого представления $\varrho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ двойственное представление

$$\varrho^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$$

определяется так, чтобы свёртка векторов с ковекторами сохранялась под действием группы G , т. е. для всех $g \in G$, $\xi \in V^*$ и $w \in V$ выполняется равенство

$$\langle \varrho^*(g)\xi, \varrho(g)w \rangle = \langle \xi, w \rangle. \quad (5-9)$$

Так как каждый оператор $\varrho(g)$ обратим, равенство (5-9) равносильно равенству

$$\langle \varrho^*(g)\xi, v \rangle = \langle \xi, \varrho(g^{-1})v \rangle$$

для всех $v \in W$, откуда $\varrho^*(g) = \varrho(g^{-1})^*$ это двойственный к $\varrho(g)^{-1}$ оператор, переводящий ковектор $\xi \in V^*$ в ковектор $\xi \circ g^{-1} : v \mapsto \xi(g^{-1}v)$. В частности, матрицы операторов $\varrho(g)$ и $\varrho^*(g)$ в двойственных базисах пространств V и V^* транспонированы и обратны друг другу.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что $\varrho^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$ является гомоморфизмом групп.

Для любых двух представлений $\varrho : G \rightarrow \text{GL}(U)$ и $\lambda : G \rightarrow \text{GL}(W)$ представление $\varrho^* \otimes \lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^* \otimes V \simeq \text{Hom}(U, V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \rightarrow V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}. \quad (5-10)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.10. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (5-10) обозначается

$$\text{Hom}_G(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi : U \rightarrow V \mid \forall g \in G \ g \varphi = \varphi g \}$$

и называется пространством G -инвариантных операторов¹.

ЛЕММА 5.2

Пусть $|G| = n$, а основное поле \mathbb{k} содержит все n корней n -той степени из единицы и $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$. Тогда в любом конечномерном представлении группы G над полем \mathbb{k} все её элементы действуют диагонализруемыми операторами.

Доказательство. Каждый оператор из группы G аннулируется многочленом $t^n - 1$, который в силу сделанных предположений не имеет кратных корней и полностью раскладывается в $\mathbb{k}[t]$ на линейные множители. По упр. 5.3 такой оператор диагонализуем. \square

5.4.1. Представления конечных абелевых групп. Пусть G — произвольная конечная абелева группа, основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, и $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$. Из лем. 5.2 и сл. 5.1 на стр. 69 следует, что всякое конечномерное линейное представление группы G является прямой суммой одномерных. Так как любой линейный оператор на одномерном пространстве скалярен, одномерное представление описывается мультипликативным гомоморфизмом

$$\chi : G \rightarrow \mathbb{k}^*, \quad gv = \chi(g)v \quad \forall g \in G \ \forall v \in V, \quad (5-11)$$

сопоставляющим каждому элементу группы скаляр, которым этот элемент действует на пространстве представления. Гомоморфизмы (5-11) называются (мультипликативными) *характерами* абелевой группы G . Одномерный G -модуль, отвечающий характеру χ , обозначается через V_χ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.11. Убедитесь, что $V_\chi \simeq V_\psi$ как G -модули тогда и только тогда, когда $\chi = \psi$ как гомоморфизмы из G в \mathbb{k}^* .

Поскольку $\chi^{|G|}(g) = \chi(g^{|G|}) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого характера лежит в мультипликативной подгруппе $\mu_{|G|}(\mathbb{k}) \subset \mathbb{k}^*$ корней $|G|$ -той степени из 1 в поле \mathbb{k} . Сами характеры образуют мультипликативную абелеву подгруппу в алгебре \mathbb{k}^G всех функций на группе G со значениями в поле \mathbb{k} . Эта группа обозначается G^\wedge и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G . Единицей в G^\wedge служит *тривиальный характер* $\chi_e \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению.

УПРАЖНЕНИЕ 5.12. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений абелевой группы равен произведению их характеров, а характер двойственного представления обратен характеру исходного.

¹а также сплетающих операторов, G -линейных операторов или G -гомоморфизмов

Группа G действует на \mathbb{k}^G по правилу $g : f(x) \mapsto f(gx)$, и V_χ -изотипная компонента этого представления состоит из таких функций $f : G \rightarrow \mathbb{k}$, что $f(gx) = \chi(g)f(x)$ для всех $x, g \in G$. Полагая в этом условии $x = e$, получаем для всех $g \in G$ равенство $f(g) = \chi(g) \cdot f(e)$, означающее, что все такие функции пропорциональны характеру χ . Тем самым, каждая изотипная компонента представления \mathbb{k}^G одномерна, и его изотипное разложение имеет вид $\mathbb{k}^G = \bigoplus_{\chi \in G^\wedge} \mathbb{k} \cdot \chi$.

В частности, $|G^\wedge| = |G|$ и характеры образуют базис пространства функций на группе.

УПРАЖНЕНИЕ 5.13. Покажите, что любой набор попарно различных гомоморфизмов $\{\psi_\nu\}$ из произвольной¹ группы G в мультипликативную группу ненулевых элементов произвольного поля \mathbb{k} линейно независим в векторном пространстве всех функций на G со значениями в поле \mathbb{k} .

ТЕОРЕМА 5.2 (двойственность Понтрягина²)

Для каждого $g \in G$ функция вычисления $ev_g : G^\wedge \rightarrow \mathbb{k}$, $\chi \mapsto \chi(g)$, является характером группы G^\wedge , и сопоставление $g \mapsto ev_g$ задаёт изоморфизм групп $G \simeq G^{\wedge\wedge}$.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$ev_g(\chi_1\chi_2) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g) = ev_g(\chi_1) \cdot ev_g(\chi_2).$$

Равенства $ev_{g_1g_2}(\chi) = \chi(g_1g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2) = ev_{g_1}(\chi) ev_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto ev_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G . В частности, $f(gx) = f(x)$ для всех функций $f : G \rightarrow \mathbb{k}$, что возможно только если $xg = x$ для каждого $x \in G$, т. е. только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, установленная нами инъективность гомоморфизма $g \mapsto ev_g$ влечёт его биективность. \square

5.4.2. Проектор на инварианты. Рассмотрим теперь линейное представление V произвольной, не обязательно абелевой, группы G . Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G образуют в V подмодуль, называемый *модулем G -инвариантов* и обозначаемый

$$V^G \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G \}.$$

Если группа G конечна и её порядок не делится на характеристику поля \mathbb{k} , каждое линейное представление V группы G допускает G -инвариантную проекцию на подмодуль инвариантов. Она обозначается $v \mapsto v^\natural$ (« v -бекар») и сопо-

¹в том числе неабелевой

²на самом деле двойственность Понтрягина имеет место для всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь простейшими примерами таких групп

ставляет вектору $v \in V$ центр тяжести¹ его G -орбиты в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$:

$$v^{\natural} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv, \quad (5-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.14. Убедитесь прямым вычислением, что при $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^{\natural}$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G , а также приведите пример конечной группы G и неразложимого G -модуля V над конечным полем \mathbb{k} , имеющего ненулевой подмодуль инвариантов V^G .

ТЕОРЕМА 5.3

Любое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо².

Доказательство. Покажем, что любой G -подмодуль $U \subset V$ является образом G -инвариантного проектора. Группа G действует на пространстве всех линейных операторов $\text{Hom}(V, U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция

$$\varphi \mapsto \varphi^{\natural} = |G|^{-1} \sum_g g\varphi g^{-1}$$

на инварианты этого действия переводит любой проектор $\pi : V \rightarrow U$ тоже в проектор V на U . Поскольку $g\pi g^{-1}U \subset U$ для всех $g \in G$, образ $\text{im } \pi^{\natural} \subset U$. С другой стороны, любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно π^{\natural} , т. к. $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \text{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1}u = g\pi g^{-1}u = u$. \square

5.5. Групповая алгебра. С каждой группой G канонически связана ассоциативная алгебра $\mathbb{k}[G]$, которая называется *групповой алгеброй* группы G над полем \mathbb{k} и представляет собою векторное пространство с базисом G , т. е. состоит из всевозможных формальных линейных комбинаций $\sum_{g \in G} c_g g$ элементов группы с произвольными коэффициентами $c_g \in \mathbb{k}$, из которых только конечное число отлично от нуля. Сложение и умножение таких выражений происходит по стандартным правилам раскрытия скобок. При этом константы c_g по определению коммутируют с элементами группы и перемножаются так, как это происходит в поле \mathbb{k} , а элементы группы перемножаются согласно имеющемуся в группе закону композиции, т. е.

$$\left(\sum_g a_g g \right) \left(\sum_h b_h h \right) = \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f, \quad (5-13)$$

где $c_f = \sum_{gh=f} a_g b_h = \sum_t a_{ft^{-1}} b_t = \sum_s a_s b_{s^{-1}f}$.

¹если $|G| : \text{char}(\mathbb{k})$, то сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён корректно

²т. е. является прямой суммой простых G -модулей

Группа G вложена в алгебру $\mathbb{k}[G]$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление $G \rightarrow \text{GL}(V)$ канонически продолжается по линейности до представления групповой алгебры $\mathbb{k}[G] \rightarrow \text{End}(V)$, образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G .

УПРАЖНЕНИЕ 5.15. Докажите, что сопоставление целому числу m монома t^m устанавливает изоморфизм между а) групповой алгеброй $\mathbb{k}[\mathbb{Z}]$ аддитивной группы \mathbb{Z} и кольцом полиномов Лорана $\mathbb{k}[t, t^{-1}]$ б) групповой алгеброй $\mathbb{k}[\mathbb{Z}/(n)]$ аддитивной группы вычетов $\mathbb{Z}/(n)$ и фактор-кольцом $\mathbb{k}[t]/(t^n - 1)$.

Замечательным примером элемента групповой алгебры является «усреднение»

$$\pi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathbb{k}[G], \quad (5-14)$$

образом которого в каждом линейном представлении $\rho : \mathbb{k}[G] \rightarrow \text{End}(V)$ является проектор (5-12) на подмодуль $V^G \subset V$ инвариантов представления ρ .

УПРАЖНЕНИЕ 5.16. Покажите, что элемент (5-14) лежит в центре¹ алгебры $\mathbb{k}[G]$.

5.5.1. Центр групповой алгебры конечной группы G

$$Z(\mathbb{k}[G]) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{k}[G] \mid \forall x \in \mathbb{k}[G] \, zx = xz\} = \{z \in \mathbb{k}[G] \mid \forall g \in G \, gzg^{-1} = z\}$$

состоит из таких линейных комбинаций $z = \sum_h z_h h \in \mathbb{k}[G]$, коэффициенты z_h которых постоянны на классах сопряжённости. Поэтому элементы

$$z_C = \sum_{h \in C} h, \quad (5-15)$$

где C пробегает множество $\text{Cl}(G)$ классов сопряжённости группы G , образуют базис групповой алгебры $\mathbb{k}[G]$. В частности, размерность центра равна $|\text{Cl}(G)|$. Мы будем называть это число *числом классов*. Отметим, что все центральные элементы групповой алгебры в любом линейном представлении $\mathbb{k}[G] \rightarrow \text{End}(V)$ изображаются операторами, лежащими в $\text{End}_G(V)$. В частности, в неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

5.5.2. Изотипные разложения. Пусть G — конечная группа. Зафиксируем такое множество $\text{Ir}(G)$ неприводимых представлений группы G , что любой неприводимый G -модуль изоморфен одному и только одному представлению из $\text{Ir}(G)$. Мы будем обозначать элементы множества $\text{Ir}(G)$ через $\lambda : G \rightarrow \text{GL}(U_\lambda)$ и писать в этом случае, что $\lambda \in \text{Ir}(G)$ или $U_\lambda \in \text{Ir}(G)$. Согласно теор. 5.3 и предл. 5.4 на стр. 74 каждый конечномерный G -модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} V_\lambda, \quad (5-16)$$

¹напомню, что *центром* кольца или группы K называется множество всех элементов, мультипликативно коммутирующих со всеми элементами K

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей в V , изоморфных заданному $U_\lambda \in \text{Ir}(G)$, и является образом канонической свёртки

$$c : \text{Hom}_G(U_\lambda, W) \otimes U_\lambda \rightarrow V, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u). \quad (5-17)$$

В любом разложении V в прямую сумму простых G -модулей сумма всех тех слагаемых, что изоморфны U_λ , совпадает с V_λ , и их количество $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$, называется *кратностью* неприводимого представления λ в представлении V . Если поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, каноническая свёртка (5-17) является изоморфизмом на изотипную компоненту V_λ , и для любых двух представлений V и W группы G

$$\dim \text{Hom}_G(V, W) = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} m_\lambda(V) m_\lambda(W) = \dim \text{Hom}_G(W, V). \quad (5-18)$$

ПРИМЕР 5.3 (ЛЕВОЕ РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ)

Для каждого $\lambda \in \text{Ir}(G)$ обозначим через $I_\lambda \subset \mathbb{k}[G]$ λ -изотипную компоненту левого регулярного представления $g : x \mapsto gx$ группы G в $\mathbb{k}[G]$. Таким образом,

$$\mathbb{k}[G] = \bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} I_\lambda. \quad (5-19)$$

Будучи G -подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\mathbb{k}[G]$, а т. к. правое умножение на любой элемент $h : x \rightarrow xh$ является G -автоморфизмом левого регулярного представления¹ и, тем самым, переводит каждую изотипную компоненту I_λ в себя, все I_λ являются также и правыми, а значит, двусторонними идеалами алгебры $\mathbb{k}[G]$. Так как $I_\lambda \cap I_\varrho = 0$ при $\lambda \neq \varrho$, и $I_\lambda \cdot I_\varrho \subset I_\lambda \cap I_\varrho$, мы получаем соотношения *ортогональности*

$$I_\lambda \cdot I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho. \quad (5-20)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.17. Докажите, что I_λ являются минимальными по включению ненулевыми двусторонними идеалами алгебры $\mathbb{k}[G]$, и что все двусторонние идеалы групповой алгебры исчерпываются прямыми суммами идеалов I_λ .

ЛЕММА 5.3

Любое представление $\varrho : \mathbb{k}[G] \rightarrow \text{End}(V)$, не содержащее в своём разложении неприводимого представления λ , переводит изотипный идеал $I_\lambda \subset \mathbb{k}[G]$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\mathbb{k}[G]$, для любого $v \in V$ подпространство $I_\lambda \cdot v = \{fv \mid f \in I_\lambda\}$ является G -подмодулем в V , и правило $f \mapsto fv$ задаёт сюръективный гомоморфизм G -модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda \cdot v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ -изотипный подмодуль в λ -изотипный, подмодуль $I_\lambda \cdot v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V . Если она нулевая, то $I_\lambda \cdot v = 0$ для всех $v \in V$. \square

¹ибо левое и правое умножение на любые два фиксированных элемента группы перестановочны друг с другом (обязательно продумайте это)

ТЕОРЕМА 5.4 (ТЕОРЕМА МАШКЕ)

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} гомоморфизм алгебр

$$\text{rep} : \mathbb{k}[G] \rightarrow \prod_{\lambda \in \text{Ir}(G)} \text{End}(U_\lambda), \quad (5-21)$$

переводящий элемент $f \in \mathbb{k}[G]$ в набор операторов, которыми этот элемент действует во всех неприводимых представлениях группы G , является изоморфизмом алгебр. Его ограничение на изотипный идеал $I_\lambda \subset \mathbb{k}[G]$ является изоморфизмом I_λ на матричную алгебру $\text{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма rep . Если элемент $h \in \mathbb{k}[G]$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G -модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f \cdot 1 = 0$ влечёт $f = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 5.3 каждое неприводимое представление $\lambda : \mathbb{k}[G] \rightarrow \text{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (5-19) за исключением I_λ . Однако по теореме Бернсайда¹ оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\text{rep}|_{I_\lambda} : I_\lambda \rightarrow \text{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. Отсюда сразу следует, что неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число и каждое из них присутствует в изотипном разложении (5-19) левого регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\mathbb{k}[G]) = \dim(I_\lambda) / \dim(U_\lambda) = \dim \text{End}(U_\lambda) / \dim U_\lambda = \dim U_\lambda$. Для доказательства сюръективности гомоморфизма rep остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda \in \text{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda \in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda) = 0$ для всех неприводимых $\varrho \neq \lambda$, $\text{rep}(\sum_\lambda f_\lambda) = \prod_\lambda \varphi_\lambda$. \square

Следствие 5.6

Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} , характеристика которого не делит $|G|$, конечно и равно числу классов сопряжённости $|\text{Cl}(G)|$ группы G , а сумма квадратов размерностей всех неприводимых равна порядку $|G|$. При этом $m_\lambda(\mathbb{k}[G]) = \dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что размерность центра прямой суммы матричных алгебр равна количеству слагаемых, второе — из равенства размерностей правого и левого пространств в (5-21). \square

Пример 5.4 (простенькие представления симметрических групп)

Сопоставление перестановке $g \in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n -клеточными диаграммами Юнга². Таким образом, неприводимые представления симметрической

¹см. сл. 5.4 на стр. 73

²длины строк диаграммы суть длины независимых циклов, на которые раскладывается перестановка

группы S_n биективно соответствуют n -клеточным диаграммам Юнга. У каждой симметрической группы S_n есть два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором перестановка σ действует умножением на знак $\text{sgn}(\sigma)$. Если характеристика поля не делит n , операторы симметризации и альтернирования

$$\text{sym}_n = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} g \quad \text{и} \quad \text{alt}_n = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) g$$

являются S_n -инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n -модуля.

УПРАЖНЕНИЕ 5.18. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n -мерное представление группы S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства \mathbb{k}^n имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый вектором $e = \sum e_i$. Индуцированное представление в $(n-1)$ -мерном фактор пространстве $\mathbb{k}^n / \mathbb{k} \cdot e$ называется *симплициальным*¹, поскольку над полем \mathbb{R} его образ представляет собою несобственную группу правильного $(n-1)$ -мерного симплекса с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю $\mathbb{k} \cdot e$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.19. Покажите, что симплициальное представление неприводимо.

Неприводимые представления группы S_3 , имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника, т. к. $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ -изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} (1 + \text{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3} (1 + \tau + \tau^2),$$

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

УПРАЖНЕНИЕ 5.20. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ лежит в $Z(\mathbb{k}(S_3))$, идемпотентен, аннулирует тривиальный и знаковый модули и действует тождественным оператором в представлении группой треугольника.

У группы S_4 , имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и 3-мерного представления несобственной группой тетраэдра имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба, а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $D_2 \subset S_4$. Равенство $2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список неприводимых представлений.

УПРАЖНЕНИЕ 5.21. Покажите, что все 5 представлений действительно неприводимы, причём два трёхмерных представления не изоморфны и получаются одно из

¹при $n = 2$ оно совпадает со знаковым

другого тензорным умножением на знаковое представление. После этого разложите в сумму неприводимых S_4 -модулей представления группы вращений куба в пространстве функций на множестве его а) вершин б) рёбер в) граней.

5.6. Представления Шура полной линейной группы. Пусть \mathbb{k} — произвольное поле характеристики нуль, а V ненулевое конечномерное векторное пространство над \mathbb{k} . Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. Изотипное разложение этого представления

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(S_n)} W_\lambda \quad (5-22)$$

называется разложением по *типам симметрии* тензоров. Про тензоры, лежащие в изотипной компоненте W_λ , говорят, что они имеют тип симметрии λ .

Пример 5.5 (квадратичные и кубические тензоры)

Два неприводимых представления группы $S_2 \simeq \mathbb{Z}/(2)$ задают разложение тензорного квадрата $V^{\otimes 2} = \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Skew}^2(V)$. Группа S_2 действует на первом слагаемом тривиально, на втором — знакопеременно. Трём неприводимым представлениям S_3 : тривиальному, знаковому и группой треугольника отвечает разложение

$$V^{\otimes 3} = \text{Sym}^3(V) \oplus \text{Skew}^3(V) \oplus W_\Delta, \quad (5-23)$$

компоненты которого являются образами S_3 -инвариантных проекторов sym_3 , alt_3 и π_Δ из [прим. 5.4](#). Пространство неподвижных тензоров последнего

$$W_\Delta = \{t \in V^{\otimes 3} \mid t + \tau t + \tau^2 t = 0\}$$

состоит из всех кубических тензоров, которые аннулируются усреднением по 3-циклу. Такие тензоры называются *лиевскими*¹, а соотношение $t + \tau t + \tau^2 t = 0$, которому они удовлетворяют, называется *тождеством Якоби*. S_3 -орбита каждого лиевского тензора порождает в $V^{\otimes 3}$ двумерное векторное пространство, на котором S_3 действует как группа треугольника. Примером лиевского тензора служит

$$[u, [u, w]] = u \otimes u \otimes w - 2u \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes u,$$

где $u, w \in V$ — линейно независимые векторы, а $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} a \otimes b - b \otimes a$ обозначает коммутатор в тензорной алгебре $T(V)$.

Упражнение 5.22. Покажите, что подпространство $W_\Delta \subset V^{\otimes 3}$ является линейной оболочкой всех кубических тензоров, которые можно получить из векторов пространства V при помощи бинарной операции взятия коммутатора в $T(V)$.

¹В честь норвежского математика Софуса Ли

5.6.1. Действие $GL(V) \times S_n$ на $V^{\otimes n}$. Гомоморфизм групп $GL(V) \rightarrow GL(V^{\otimes n})$, переводящий $f \in GL(V)$ в $f^{\otimes n}$, задаёт представление полной линейной группы $GL(V)$ в пространстве $V^{\otimes n}$, в котором оператор $f \in GL(V)$ действует на разложимые тензоры по правилу $f : v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f v_1 \otimes f v_2 \otimes \cdots \otimes f v_n$. Так как это действие перестановочно с действием симметрической группы, на пространстве $V^{\otimes n}$ имеется структура модуля над прямым произведением $GL(V) \times S_n$: пара $f \times g \in GL(V) \times S_n$ действует как $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_{g(1)}) \otimes f(v_{g(2)}) \otimes \cdots \otimes f(v_{g(n)})$. Будучи перестановочными с S_n , операторы из $GL(V)$ переводят в себя каждую изотипную компоненту разложения $V^{\otimes n} = \bigoplus W_\lambda$ по типам симметрии тензоров. Поэтому каждое пространство W_λ тоже является модулем над $GL(V) \times S_n$.

Для каждого неприводимого S_n -модуля U_λ на тензорном произведении

$$\text{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V^{\otimes n}) \otimes U_\lambda$$

также есть структура $GL(V) \times S_n$ -модуля с действием $f \times g : \varphi \otimes u \mapsto (f^{\otimes n} \circ \varphi) \otimes (gu)$. Согласно [предл. 5.3](#) свёртка $\varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)$ задаёт S_n -инвариантный изоморфизм¹

$$c : \text{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V^{\otimes n}) \otimes U_\lambda \simeq W_\lambda. \quad (5-24)$$

Очевидно, что он перестановочен с действием $GL(V) \times S_n$. Пространство

$$\mathbb{S}^\lambda V \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V^{\otimes n}) \quad (5-25)$$

с действием $GL(V)$ по правилу $f : \varphi \mapsto f^{\otimes n} \circ \varphi$ называется *модулем Шура* над полной линейной группой $GL(V)$.

ЛЕММА 5.4

Линейная оболочка операторов вида $f^{\otimes n}$ с $f \in GL(V)$ совпадает с централизатором $\text{End}_{S_n}(V^{\otimes n})$ действия S_n на $V^{\otimes n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Цепочка канонических изоморфизмов $\text{End}(V^{\otimes n}) \simeq V^{\otimes n*} \otimes V^{\otimes n} \simeq V^{*\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \simeq (V^* \otimes V)^{\otimes n} \simeq \text{End}(V)^{\otimes n}$ отождествляет подалгебру $\text{End}_{S_n}(V^{\otimes n}) \subset \text{End}(V^{\otimes n})$ с подпространством симметрических тензоров

$$\text{Sym}^n(\text{End}(V)) \subset \text{End}(V)^{\otimes n},$$

которое линейно порождается тензорами вида $f^{\otimes n}$ с $f \in \text{End}(V)$ в силу [упр. 5.23](#) ниже. Утверждение леммы вытекает отсюда по [упр. 5.24](#). \square

УПРАЖНЕНИЕ 5.23 (принцип Аронгольда). Покажите, что для любого конечномерного векторного пространства W над произвольным бесконечным полем пространство симметрических тензоров $\text{Sym}^n(W) \subset W^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $w^{\otimes n} = w \otimes w \otimes \cdots \otimes w$.

¹ строго говоря, [предл. 5.3](#) утверждает это над алгебраически замкнутым полем, однако мы увидим ниже, что все комплексные неприводимые представления S_n определены над \mathbb{Q} , так что для симметрических групп [предл. 5.3](#) справедливо над \mathbb{Q}

УПРАЖНЕНИЕ 5.24. Покажите, что линейная оболочка тензоров $f^{\otimes n}$ с $f \in \text{End}(V)$ совпадает с линейной оболочкой тензоров $f^{\otimes n}$ с $f \in \text{GL}(V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5

Все $\text{GL}(V)$ -модули Шура $\mathbb{S}^\lambda V = \text{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V^{\otimes n})$ неприводимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Канонический изоморфизм $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda \simeq W_\lambda$ из формулы (5-24) переводит действие S_n на W_λ в действие $g : \varphi \otimes u \mapsto \varphi \otimes (gu)$. Любой оператор $F \in \text{End}(\mathbb{S}^\lambda V)$ задаёт линейное преобразование $F : \varphi \otimes u \mapsto F(\varphi) \otimes u$ пространства $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda$, перестановочное с действием S_n . По лем. 5.4 оно лежит в линейной оболочке операторов $f : \varphi \otimes u \mapsto (f^{\otimes n} \circ \varphi) \otimes u$. Следовательно, образ представления Шура $\text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{S}^\lambda V)$ линейно порождает всю алгебру эндоморфизмов $\text{End}(\mathbb{S}^\lambda V)$ пространства $\mathbb{S}^\lambda(V)$. По упр. 5.7 такое представление неприводимо. \square

5.6.2. Соответствие Шура – Вейля. Соответствие $U_\lambda \leftrightarrow \mathbb{S}^\lambda V$ между неприводимыми представлениями симметрических групп¹ и представлениями полной линейной группы $\text{GL}(V)$ называется *соответствием Шура – Вейля*. Тривиальному одномерному представлению группы S_n при этом отвечает представление $\text{GL}(V)$ на пространстве $S^n V$, а одномерному знаковому представлению — представление $\text{GL}(V)$ на пространстве $\Lambda^n V$. Можно показать, что ненулевые $\text{GL}(V)$ -модули $\mathbb{S}^\lambda V$ не изоморфны друг другу при разных λ и с точностью до тензорных умножений на одномерные представления $\det^m : \text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}_1(\mathbb{k})$, в которых $f \in \text{GL}(V)$ действует умножением на $\det^m(f)$ с фиксированным $m \in \mathbb{Z}$, исчерпывают все такие конечномерные неприводимые представления $\varrho : \text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}(W)$, что элементы матрицы $\varrho(f)$ являются рациональными функциями элементов матрицы f .

¹обратите внимание, что количество клеток n в диаграмме λ никак не связано с размерностью пространства V и может быть любым, однако некоторые пространства $\mathbb{S}^\lambda V$ при этом могут оказаться нулевыми, как это происходит, к примеру, с внешними степенями $\Lambda^n V$ при $n > \dim V$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 5.2. При $m \geq 2$ классы многочленов, делящихся на p , составляют собственный подмодуль в $\mathbb{k}[t]/(p^m)$. При $m = 1$ фактор кольцо $\mathbb{k}[t]/(p)$ является полем, т. е. для любого ненулевого класса $[g] \in \mathbb{k}[t]/(p)$ существует такой многочлен $h \in \mathbb{k}[t]$, что $h \cdot [g] = [1]$. Поэтому любой класс $[f] \in \mathbb{k}[t]/(p)$ получается из класса $[g]$ применением оператора $h(t) \cdot f(t)$.

Упр. 5.3. Диагональный оператор с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ аннулируется многочленом $\prod (t - \lambda_i)$. Наоборот, поскольку многочлен, аннулирующий модуль (5-4), делится на максимальную степень каждого элементарного делителя, все элементарные делители имеют вид $t - \lambda$ и входят в разложение (5-4) только в первых степенях, что и означает диагонализуемость оператора умножения на t .

Упр. 5.4. Включения $R \ker f \subset \ker f$ и $R \operatorname{im} f \subset \operatorname{im} f$ проверяются так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$; если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$.

Упр. 5.7. Для любых векторов $v, w \in V$ рассмотрим произвольный оператор $\varphi : V \rightarrow V$ переводящий v в w . Так как $\varphi = \sum \lambda_i f_i$ с $\lambda_i \in \mathbb{k}$ и $f_i \in R$, вектор $w = \varphi(v) = \sum \lambda_i f_i(v)$ лежит в линейной оболочке R -орбиты вектора v .

Упр. 5.10. Поскольку правило $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ , его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$g^* \otimes \lambda(g) : \xi \otimes w \mapsto g(g^{-1})^* \xi \otimes \lambda(g)w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw).$$

Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g(\xi(g^{-1}u) \cdot w) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

Упр. 5.13. От противного. Рассмотрим линейную зависимость $\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \dots + \lambda_n \psi_n = 0$, содержащую минимальное возможное число слагаемых, и какой-нибудь $h \in G$, для которого $\psi_1(h) \neq \psi_2(h)$. Поскольку $\forall g \in G$ выполняется равенство $\sum_i \lambda_i \psi_i(h) \psi_i(g) = \sum_i \lambda_i \psi_i(hg) = 0$, мы получаем ещё одну линейную зависимость между ψ_i с коэффициентами $\lambda_i \cdot \psi_i(h)$. Деля все её коэффициенты на $\psi_1(h)$ и вычитая из первой зависимости, получаем линейную зависимость между ψ_i с нулевым коэффициентом при ψ_1 и ненулевым коэффициентом при ψ_2 . Она нетривиальна и содержит меньше слагаемых. Противоречие.

Упр. 5.23. Достаточно показать, что никакая ненулевая линейная форма $\varphi \in \operatorname{Sym}^n(W)^*$ не зануляется на всех тензорах $w^{\otimes n}$. Зафиксируем в W базис e_1, e_2, \dots, e_d . Пусть $w = \sum x_i e_i$, а φ переводит стандартный базисный вектор $e_{[m_1 m_2 \dots m_d]} \in \operatorname{Sym}^n(W)$ в число $a_{m_1 m_2 \dots m_d} \in \mathbb{k}$. Тогда $\varphi(w^{\otimes n}) = \sum_{m_1 m_2 \dots m_d} a_{m_1 m_2 \dots m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d}$. Над бесконечным полем \mathbb{k} такой многочлен тогда и только тогда является тождественно нулевой функцией от x_1, x_2, \dots, x_n , когда все его коэффициенты $a_{m_1 m_2 \dots m_d} = 0$.