§6. $\mathfrak{sl}_2$-модули.

6.1. Представления алгебр Ли. Всюду в этом разделе мы считаем, что $\Bbbk$ — произвольное поле характеристики нуль. Векторное пространство $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли*, если на нём задана билинейная операция «скобка» $[*,*] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, удовлетворяющая *тождеству Якоби*: $\forall\, X,Y,Z \quad [X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$.

Например, на любой ассоциативной алгебре A над полем $\Bbbk$ имеется структура алгебры Ли, задаваемая *коммутатором* $[a,b] \overset{\text{def}}{=} ab - ba$.

Упражнение 6.1. Убедитесь, что для коммутаторов выполняется тождество Якоби.

Эта алгебра Ли называется *коммутаторной алгеброй* ассоциативной алгебры A. Наоборот, для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеется единственная ассоциативная алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и линейное отображение $\nu : \mathfrak{g}\to\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, для любых $X,Y\in\mathfrak{g}$ переводящее $[X,Y]$ в $\nu(X)\nu(Y)-\nu(Y)\nu(X)$, такие что каждое линейное отображение $\psi : \mathfrak{g}\to A$ в ассоциативную алгебру, переводящее скобку в коммутатор, однозначно представляется в виде $\psi=\widetilde{\psi}\circ\nu$, где $\widetilde{\psi} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\to A$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр.

Упражнение 6.2. Удостоверьтесь, что это универсальное свойство определяет алгебру $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и линейное отображение $\nu : \mathfrak{g}\to\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ однозначно с точностью до единственного перестановочного с ν изоморфизма ассоциативных алгебр.

Ассоциативная алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ называется *универсальной обёртывающей* алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Её можно построить как фактор тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ по двустороннему идеалу, порождённому всевозможными разностями $X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y]\in\mathfrak{g}^{\otimes 2}\oplus\mathfrak{g}$.

Упражнение 6.3. Проверьте для такой фактор алгебры выполнение предыдущего универсального свойства.

Линейное отображение $\varrho : \mathfrak{g}\to\operatorname{End}(V)$ называется *представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если оно переводит скобку в коммутатор, т. е. $\varrho([A,B]) = [\varrho(A),\varrho(B)]$. Пространство V называется в этой ситуации $\mathfrak{g}$-модулем. В силу универсального свойства универсальной обёртывающей алгебры, линейные представления алгебры Ли $\varrho : \mathfrak{g}\to\operatorname{End}(V)$ биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр $\tilde{\varrho} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\to\operatorname{End}(V)$, т. е. линейным представлениям ассоциативной алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Представление $\tilde{\varrho}$ отображает класс тензора $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_m$ в композицию $\varrho(A_1)\circ\varrho(A_2)\circ\ldots\circ\varrho(A_m)$, и его образ совпадает с ассоциативной оболочкой $\operatorname{Ass}\big(\varrho(\mathfrak{g})\big)\subset\operatorname{End}(V)$.

Прямая сумма $\mathfrak{g}$-модулей U и W наделяется структурой $\mathfrak{g}$-модуля с действием

$$F(u\dotplus w)\overset{\text{def}}{=}(Fu)\dotplus(Fw)\,.$$

Тензорные произведения, внешние и симметрические степени $\mathfrak{g}$-модулей также наделяются структурами $\mathfrak{g}$-модулей, однако в отличие от представлений групп, действие операторов $F\in\mathfrak{g}$ распространяется на произведения не по мультипликативности, а *по правилу Лейбница*: $F(u\otimes w)\overset{\text{def}}{=}(Fu)\otimes w+u\otimes(Fw)$, $F(u\wedge w)\overset{\text{def}}{=}(Fu)\wedge w+u\wedge(Fw)$, $F(u\cdot w)\overset{\text{def}}{=}(Fu)\cdot w+u\cdot(Fw)$. Для любого $\mathfrak{g}$-подмодуля $V\subset W$ фактор пространство W/V также является $\mathfrak{g}$-модулем с действием $F[v]\overset{\text{def}}{=}[Fv]$.

Упражнение 6.4. Убедитесь, что эти правила корректны и переводят коммутаторы в коммутаторы.

Двойственное представление $\varrho^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V^*)$ к представлению $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ определяется правилом $\varrho^*(F) \overset{\text{def}}{=} -\varrho(F)^*$ и взаимодействует со свёрткой по формуле

$$\langle\, \varrho^*(F)\xi \,,\, w \,\rangle + \langle\, \xi \,,\, \varrho(F)\, w \,\rangle = 0\,.$$

Действие $\mathfrak{g}$ на пространстве $\mathrm{Hom}(U, V)$ задаётся правилом

$$F : \varphi \mapsto [F, \varphi] \overset{\text{def}}{=} F\varphi - \varphi F\,. \tag{6-1}$$

Упражнение 6.5. Проверьте, что коммутатор при этом представится коммутатором и что канонический изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ согласован с действием $\mathfrak{g}$.

Подпространство неподвижных векторов представления (6-1) обозначается

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, V) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall F \in \mathfrak{g}\; F\varphi = \varphi F\}$$

и называется пространством $\mathfrak{g}$-*инвариантных* операторов[1].

6.2. Описание конечномерных неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. В различных областях математики важную роль играет алгебра Ли бесследных 2×2-матриц

$$\mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathrm{Mat}_2(\Bbbk) \mid \operatorname{tr} A = 0\}\,.$$

Обозначение связано с тем, что это векторное пространство состоит из касательных векторов к квадрике $\mathrm{SL}_2(\Bbbk) = \{g \in \mathrm{Mat}_2(\Bbbk) \mid \det g = 1\}$ в точке E.

Упражнение 6.6. Убедитесь в этом.

В качестве стандартного базиса в $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ мы используем матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6-2}$$

которые коммутируют по правилам:

$$[X, Y] = H\,, \quad [H, X] = 2\,X\,, \quad [H, Y] = -2\,Y\,. \tag{6-3}$$

Линейное представление $\mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)$ задаётся указанием трёх операторов $X, Y, H : V \to V$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6-3).

Пример 6.1 (стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули)
Дифференциальные операторы

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad Y = y\,\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad H = x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{6-4}$$

действуют на пространстве многочленов $\Bbbk[x, y]$ сохраняя степень. Обозначим через $V_n \subset \Bbbk[x, y]$ подпространство однородных многочленов степени n. Действие операторов (6-4) на одномерном пространстве $V_0 \simeq \Bbbk$ нулевое, а на двумерном пространстве

[1] а также $\mathfrak{g}$-*гомоморфизмов*

V_1 задаётся в базисе x, y матрицами (6-2), т. е. является тавтологическим представлением $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$ на $\Bbbk^2$. Действие операторов (6-4) на пространстве $V_n = S^nV_1$ является продолжением тавтологического представления на его симметрическую степень по правилу Лейбница.

Упражнение 6.7. Проверьте, что любой линейный дифференциальный оператор первого порядка $F = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ удовлетворяет правилу Лейбница и что коммутатор любых двух таких операторов также является линейным дифференциальным оператором первого порядка.

Модули V_n называются *стандартными*. В базисе $e_k = x^ky^{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, действие операторов X, Y, H задаётся формулами

$$X(e_k) = (n-k)\,e_{k+1}\,, \quad Y(e_k) = k\,e_{k-1}\,, \quad H(e_k) = (2k-n)\,e_k \tag{6-5}$$

Предложение 6.1
Все стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули V_n неприводимы.

Доказательство. Разложим произвольный вектор $v \in V_n$ по базису $e_k = x^ky^{n-k}$ и обозначим через m наибольший из номеров базисных векторов, входящих в это разложение с ненулевым коэффициентом. В силу формул (6-5) векторы X^kY^mv с $0 \leqslant k \leqslant n$ являются ненулевыми кратными базисных векторов e_k. Следовательно, $\mathfrak{sl}_2$-орбита любого вектора v линейно порождает всё пространство V_n. □

Лемма 6.1
В любом $\mathfrak{sl}_2$-модуле операторы X и Y переводят каждое собственное подпространство оператора H с собственным значением λ в в собственные подпространства оператора H с собственными значениями $\lambda + 2$ и $\lambda - 2$ соответственно.

Доказательство. Пользуясь соотношениями $HX - XH = 2\,X$ и $HY - YH = -2Y$, получаем для вектора v с $Hv = \lambda v$ равенства $HXv = XHv + 2Xv = (\lambda+2)\,Xv$ и $HYv = YHv - 2Yv = (\lambda-2)\,Yv$. □

Определение 6.1
Собственные значения оператора H на неприводимом модуле V называются *весами*, а собственные векторы — *весовыми векторами*. Весовые векторы, находящиеся в ядре оператора X называются *примитивными*.

Лемма 6.2
Любой конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль над алгебраически замкнутым полем обладает примитивным вектором.

Доказательство. Рассмотрим произвольный весовой вектор v и подействуем на него возрастающими степенями оператора X. Получающиеся векторы $Xv, X^2v, \dots$ тоже являются весовыми со строго возрастающими весами. Поскольку у H имеется лишь конечное число ненулевых собственных подпространств с различными собственными значениями, в этой цепочке имеется конечное число ненулевых векторов. Последний из них и будет примитивным. □

Лемма 6.3
Вес каждого примитивного вектора в любом конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле над произвольным полем характеристики нуль является натуральным числом, и $\mathfrak{sl}_2$-орбита примитивного вектора веса m изоморфна стандартному модулю V_m.

Доказательство. Пусть $Hv = \lambda v$ и $Xv = 0$. По лем. 6.1 векторы $v, Yv, Y^2v, \dots$ являются собственными для H с собственными числами $\lambda, (\lambda-2), (\lambda-4), \dots$ Поэтому существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $Y^{m+1}v = 0$, а $Y^m v \neq 0$. Обозначим этот последний ненулевой вектор через v_0, а его предшественников — через $v_1, v_2, \dots$, так что вся цепочка примет вид

$$0 \xleftarrow{Y} v_0 \xleftarrow{Y} v_1 \xleftarrow{Y} v_2 \xleftarrow{Y} \dots \xleftarrow{Y} v_{m-1} \xleftarrow{Y} v_m \xrightarrow{X} 0$$

Оператор H действует на эту цепочку по формуле $Hv_i = (\lambda - 2(m-i))\, v_i$. Пользуясь соотношением $XY = YX + H$, вычисляем действие на цепочку оператора X:

$$\begin{aligned}
&Xv_m = 0\\
&Xv_{m-1} = XYv_m = YXv_m + Hv_m = \lambda v_m\\
&Xv_{m-2} = XYv_{m-1} = YXv_{m-1} + Hv_{m-1} = (2\lambda - 2)\, v_{m-1}\\
&Xv_{m-3} = XYv_{m-2} = YXv_{m-2} + Hv_{m-2} = (3\lambda - (2+4))\, v_{m-2}\\
&\quad\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots\\
&Xv_{m-k} = XYv_{m-k+1} = YXv_{m-k+1} + Hv_{m-k+1} =\\
&\qquad\quad = \big(k\lambda - (2+4+\dots+2(k-1))\big)\, v_{m-k+1} = k(\lambda - k + 1)\, v_{m-k+1}\\
&\quad\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots\\
&Xv_0 = m(\lambda - m + 1)\, v_1
\end{aligned}$$

Следующий такой шаг даёт нулевой вектор

$$0 = XYv_0 = YXv_0 + Hv_0 = (m+1)(\lambda - m)\, v_0\,,$$

что возможно только при $\lambda = m$. В этом случае операторы X, Y, H действуют по формулам $X(v_k) = (m-k)(k+1)\, v_{k+1}$, $Y(v_k) = v_{k-1}$, $H(v_k) = (2k-m)\, v_k$ и отображение $v_k \mapsto \frac{1}{k!}\, x^k y^{m-k}$ отождествляет линейную оболочку векторов v_k с модулем V_m. □

Теорема 6.1
Конечномерные неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули над любым полем $\Bbbk$ характеристики нуль исчерпываются стандартными модулями V_n.

Доказательство. Обозначим через $\overline{\Bbbk} \subset \Bbbk$ какое-нибудь алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$ и рассмотрим тензорное произведение $\overline{V} = \overline{\Bbbk} \otimes V$ векторных пространств над полем $\Bbbk$. Правило $\lambda\cdot(\mu\otimes v) \overset{\text{def}}{=} (\lambda\mu)\otimes v$ наделяет $\overline{V}$ структурой векторного пространства над полем $\overline{\Bbbk}$, и любой $\Bbbk$-линейный оператор $F : V \to V$ продолжается до $\overline{\Bbbk}$ линейного оператора $\overline{F} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes F : \overline{V} \to \overline{V}$ (эта конструкция является непосредственным обобщением комплексификации вещественных векторных пространств).

Упражнение 6.8. Покажите, что для любого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V над $\Bbbk$ векторы $\overline{e}_p = 1\otimes e_p$ образуют базис пространства $\overline{V}$ над $\overline{\Bbbk}$, и матрица оператора $\overline{F}$ в этом базисе совпадает с матрицей F в базисе e_p

Если пространство V является $\mathfrak{sl}_2$-модулем, то пространство $\overline{V}$ также является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия операторов $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и $\overline{H}$. В силу предыдущей леммы у оператора $\overline{H}$ существует целое собственное число. По упр. 6.8 оно является собственным числом и для оператора H на пространстве V. Повторяя рассуждения из доказательства лем. 6.2, заключаем, что в пространстве V имеется примитивный вектор, и тогда по лем. 6.3 он порождает в V стандартный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль, который должен совпасть со всем V, поскольку V неприводимо. □

Упражнение 6.9. Докажите, что в любом конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле над любым полем $\Bbbk$ характеристики нуль оператор H диагонализуем и имеет целые собственные значения, а операторы X и Y нильпотентны.

6.3. Полная приводимость $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Сопоставление матрице $F \in \mathfrak{sl}_2$ оператора коммутирования $\mathrm{ad}_F : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{sl}_2$, $Z \mapsto [F, Z]$, задаёт *присоединённое представление* $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$.

Упражнение 6.10. Проверьте, что $\mathrm{ad}_{[F,G]} = [\mathrm{ad}_F, \mathrm{ad}_G]$ и что $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия $F : \varphi \mapsto [\mathrm{ad}_F, \varphi]$.

На ассоциативной алгебре $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ имеется каноническая симметричная билинейная форма следа $\mathrm{tr}(\varphi\psi)$. Её ограничение на образ присоединённого представления задаёт на $\mathfrak{sl}_2$ невырожденную симметричную билинейную *форму Киллинга*

$$(F, G) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_F \circ \mathrm{ad}_G)\,.$$

Упражнение 6.11. Проверьте, что её матрица Грама в базисе X, Y, H равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, двойственным к базису X, Y, H относительно формы Киллинга является базис

$$X^* = \frac{1}{4}Y\,, \quad Y^* = \frac{1}{4}X\,, \quad H^* = \frac{1}{8}H\,.$$

Форма Киллинга отождествляет $\mathfrak{sl}_2$ с $\mathfrak{sl}_2^*$, переводя векторы F в ковекторы $G \mapsto (F, G)$. Это отождествление продолжается до изоморфизма

$$\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2\,, \tag{6-6}$$

тождественного по второму тензорному сомножителю и переводящему тождественный эндоморфизм пространства $\mathfrak{sl}_2$ в *тензор Казимира*

$$X^* \otimes X + Y^* \otimes Y + H^* \otimes H = \frac{1}{4}\,(X \otimes Y + Y \otimes X) + \frac{1}{8}\,H \otimes H\,.$$

Каждое линейное представление $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)$ продолжается до представления

$$\tilde{\varrho} : \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)\,, \quad \tilde{\varrho}(A \otimes B) = \varrho(A)\varrho(B)\,.$$

Упражнение 6.12. Проверьте, что композиция представления $\tilde{\varrho}$ с изоморфизмом (6-6) является гомоморфизмом $\mathfrak{sl}_2$-модулей[1] $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \to \mathrm{End}(V)$.

Представление $\tilde{\varrho}$ переводит тензор Казимира в оператор[2]

$$K \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\,(XY + YX) + \frac{1}{8}\,H^2\,,$$

который называется *оператором Казимира*. Из предыдущего упражнения вытекает, что $K \in \mathrm{End}_{\mathfrak{sl}_2}(V)$.

Упражнение 6.13. Убедитесь прямым вычислением, что K коммутирует с X, Y, H и действует на стандартном неприводимом модуле V_m гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{8}(m^2 + 2\,m)$.

Лемма 6.4

В любом конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле V к каждому подмодулю U коразмерности 1 имеется дополнительный 1-мерный тривиальный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль L, такой что $V = U \oplus L$.

Доказательство. Всякий одномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль с неизбежностью тривиален, ибо в коммутативной алгебре эндоморфизмов одномерного векторного пространства все коммутаторы нулевые, и значит, $H = [X,Y] = 0$, $2X = [H,X] = 0$, $2Y = [Y,H] = 0$. В частности, фактор модуль $V\,/\,U$ по любому подмодулю $U \subset V$ коразмерности 1 тривиален, т. е. все три оператора X, Y, H переводят V в U.

Строить дополнительный к U тривиальный одномерный подмодуль L мы будем индуктивно по $\dim U$. Если подмодуль U тривиален, то и весь модуль V тривиален, т. к. по предыдущему замечанию $\mathfrak{sl}_2 V = [\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2] V \subset \mathfrak{sl}_2\mathfrak{sl}_2 V \subset \mathfrak{sl}_2 U = 0$. В этом случае любое дополнительное к U одномерное подпространство $L \subset V$ является искомым подмодулем. Если $U \simeq V_m$ нетривиален и неприводим, оператор $\frac{8}{m^2+2\,m}K$ является согласно упр. 6.13 $\mathfrak{sl}_2$-инвариантным проектором V на U, и искомый дополнительный подмодуль $L = \ker K$. Если же подмодуль U приводим, мы выберем в нём ненулевой неприводимый подмодуль $W \subsetneq U$ и сначала по индуктивному предположению построим $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное разложение фактор модуля $(V/W) = (U/W) \oplus (\tilde{L}/W)$, в котором $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $\tilde{L} \subset V$ таков, что $L \cap U = W$ и $\dim(L/W) = 1$, а затем, применяя индуктивное предположение к паре $W \subset \tilde{L}$, построим инвариантное разложение $\tilde{L} = W \oplus L$. Тривиальный 1-мерный подмодуль $L \subset \tilde{L} \subset V$ является искомым дополнением к U. □

Теорема 6.2

Всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль V вполне приводим, т. е. является прямой суммой стандартных простых модулей V_m из прим. 6.1 на стр. 79.

[1] действие $\mathfrak{sl}_2$ на $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ задаётся коммутированием с присоединённым действием, а действие на $\mathrm{End}(V)$ задаётся коммутированием с действием на V

[2] далее мы, как и ранее, опускаем символ ϱ, обозначим буквами X, Y, Z образы базисных операторов $\mathfrak{sl}_2$ в представлении ϱ

Доказательство. Чтобы построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор модуля V на произвольный его подмодуль $U \subset V$, рассмотрим в $\mathfrak{sl}_2$-модуле $\mathrm{Hom}(V, U)$ подпространство $W = \{\varphi : \varphi|_U \in \Bbbk \cdot \mathrm{Id}_U\}$, а в нём — подпространство $W' = \{\varphi \in W : \varphi|_U = 0\}$.

Упражнение 6.14. Убедитесь, что W и W' являются $\mathfrak{sl}_2$-подмодулями в $\mathrm{Hom}(V, U)$ и коразмерность W' в W равна 1.

По предыдущей лемме $W = W' \oplus L$, для некоторого тривиального $\mathfrak{sl}_2$-модуля $L \subset W$. Искомым проектором $V \twoheadrightarrow U$ является базисный вектор подмодуля L, отскалированный так, чтобы его ограничение на U было тождественным оператором. $\square$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 6.5. Первое утверждение является следствием тождества Якоби, второе достаточно проверять на разложимых тензорах.

Упр. 6.6. Прямая $t \mapsto E + tA$ касается квадрики $\det X = 1$ в точке E тогда и только тогда квадратный трёхчлен $\det(E + tA) - 1 = \det(A) \cdot t^2 + \mathrm{tr}(A) \cdot t$ имеет кратный корень в нуле.

Упр. 6.8. Если $V = \Bbbk \cdot e_1 \oplus \Bbbk \cdot e_2 \oplus \cdots \oplus \Bbbk \cdot e_n$, то $\overline{\Bbbk} \otimes V \simeq \overline{\Bbbk} \cdot e_1 \oplus \overline{\Bbbk} \cdot e_2 \oplus \cdots \oplus \overline{\Bbbk} \cdot e_n$ в силу канонического изоморфизма дистрибутивности из предл. 1.3 на стр. 13.