

§6. \mathfrak{L}_2 -модули.

6.1. Представления алгебр Ли. Всюду в этом разделе мы считаем, что \mathbb{k} — произвольное поле характеристики нуль. Векторное пространство \mathfrak{g} называется *алгеброй Ли*, если на нём задана билинейная операция «скобка» $[\ast, \ast] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, удовлетворяющая *тождеству Якоби*: $\forall X, Y, Z \quad [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$.

Например, на любой ассоциативной алгебре A над полем \mathbb{k} имеется структура алгебры Ли, задаваемая *коммутатором* $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} ab - ba$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Убедитесь, что для коммутаторов выполняется тождество Якоби.

Эта алгебра Ли называется *коммутаторной алгеброй* ассоциативной алгебры A . Наоборот, для любой алгебры Ли \mathfrak{g} имеется единственная ассоциативная алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и линейное отображение $\nu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ переводящее $[X, Y]$ в $\nu(X)\nu(Y) - \nu(Y)\nu(X)$, такие что каждое линейное отображение $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow A$ в ассоциативную алгебру, переводящее скобку в коммутатор, однозначно представляется в виде $\psi = \tilde{\psi} \circ \nu$, где $\tilde{\psi} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр.

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Удостоверьтесь, что это универсальное свойство определяет алгебру $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и линейное отображение $\nu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ однозначно с точностью до единственного перестановочного с ν изоморфизма ассоциативных алгебр.

Ассоциативная алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ называется *универсальной обёртывающей* алгеброй алгебры Ли \mathfrak{g} . Её можно построить как фактор тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ по двустороннему идеалу, порождённому всевозможными разностями $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \in \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \mathfrak{g}$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Проверьте для такой фактор алгебры выполнение предыдущего универсального свойства.

Линейное отображение $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ называется *представлением* алгебры Ли \mathfrak{g} , если оно переводит скобку в коммутатор, т. е. $\rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)]$. Пространство V называется в этой ситуации \mathfrak{g} -модулем. В силу универсального свойства универсальной обёртывающей алгебры, линейные представления алгебры Ли $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр $\tilde{\rho} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(V)$, т. е. линейным представлениям ассоциативной алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Представление $\tilde{\rho}$ отображает класс тензора $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_m$ в композицию $\rho(A_1) \circ \rho(A_2) \circ \dots \circ \rho(A_m)$, и его образ совпадает с ассоциативной оболочкой $\text{Ass}(\rho(\mathfrak{g})) \subset \text{End}(V)$.

Прямая сумма \mathfrak{g} -модулей U и W наделяется структурой \mathfrak{g} -модуля с действием

$$F(u \dot{+} w) \stackrel{\text{def}}{=} (Fu) \dot{+} (Fw).$$

Тензорные произведения, внешние и симметрические степени \mathfrak{g} -модулей также наделяются структурами \mathfrak{g} -модулей, однако в отличие от представлений групп, действие операторов $F \in \mathfrak{g}$ распространяется на произведения не по мультипликативности, а по *правилу Лейбница*: $F(u \otimes w) \stackrel{\text{def}}{=} (Fu) \otimes w + u \otimes (Fw)$, $F(u \wedge w) \stackrel{\text{def}}{=} (Fu) \wedge w + u \wedge (Fw)$, $F(u \cdot w) \stackrel{\text{def}}{=} (Fu) \cdot w + u \cdot (Fw)$. Для любого \mathfrak{g} -подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является \mathfrak{g} -модулем с действием $F[v] \stackrel{\text{def}}{=} [Fv]$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Убедитесь, что эти правила корректны и переводят коммутаторы в коммутаторы.

Двойственное представление $\varrho^* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V^*)$ к представлению $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ определяется правилом $\varrho^*(F) \stackrel{\text{def}}{=} -\varrho(F)^*$ и взаимодействует со свёрткой по формуле

$$\langle \varrho^*(F)\xi, w \rangle + \langle \xi, \varrho(F)w \rangle = 0.$$

Действие \mathfrak{g} на пространстве $\text{Hom}(U, V)$ задаётся правилом

$$F : \varphi \mapsto [F, \varphi] \stackrel{\text{def}}{=} F\varphi - \varphi F. \quad (6-1)$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.5. Проверьте, что коммутатор при этом представится коммутатором и что канонический изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \text{Hom}(U, V)$ согласован с действием \mathfrak{g} . Подпространство неподвижных векторов представления (6-1) обозначается

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi : U \rightarrow V \mid \forall F \in \mathfrak{g} F\varphi = \varphi F \}$$

и называется пространством \mathfrak{g} -инвариантных операторов¹.

6.2. Описание конечномерных неприводимых \mathfrak{sl}_2 -модулей. В различных областях математики важную роль играет алгебра Ли бесследных 2×2 -матриц

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ A \in \text{Mat}_2(\mathbb{k}) \mid \text{tr } A = 0 \}.$$

Обозначение связано с тем, что это векторное пространство состоит из касательных векторов к квадрике $\text{SL}_2(\mathbb{k}) = \{ g \in \text{Mat}_2(\mathbb{k}) \mid \det g = 1 \}$ в точке E .

УПРАЖНЕНИЕ 6.6. Убедитесь в этом.

В качестве стандартного базиса в $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ мы используем матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6-2)$$

которые коммутируют по правилам:

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y. \quad (6-3)$$

Линейное представление $\mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End}(V)$ задаётся указанием трёх операторов $X, Y, H : V \rightarrow V$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (6-3).

ПРИМЕР 6.1 (СТАНДАРТНЫЕ \mathfrak{sl}_2 -МОДУЛИ)

Дифференциальные операторы

$$X = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad H = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \quad (6-4)$$

действуют на пространстве многочленов $\mathbb{k}[x, y]$ сохраняя степень. Обозначим через $V_n \subset \mathbb{k}[x, y]$ подпространство однородных многочленов степени n . Действие операторов (6-4) на одномерном пространстве $V_0 \simeq \mathbb{k}$ нулевое, а на двумерном пространстве

¹а также \mathfrak{g} -гомоморфизмов

V_1 задаётся в базисе x, y матрицами (6-2), т. е. является тавтологическим представлением $\mathfrak{sl}_2 \subset \text{Mat}_2(\mathbb{k})$ на \mathbb{k}^2 . Действие операторов (6-4) на пространстве $V_n = S^n V_1$ является продолжением тавтологического представления на его симметрическую степень по правилу Лейбница.

УПРАЖНЕНИЕ 6.7. Проверьте, что любой линейный дифференциальный оператор первого порядка $F = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ удовлетворяет правилу Лейбница и что коммутатор любых двух таких операторов также является линейным дифференциальным оператором первого порядка.

Модули V_n называются *стандартными*. В базисе $e_k = x^k y^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, действие операторов X, Y, H задаётся формулами

$$X(e_k) = (n - k)e_{k+1}, \quad Y(e_k) = k e_{k-1}, \quad H(e_k) = (2k - n)e_k \quad (6-5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1

Все стандартные \mathfrak{sl}_2 -модули V_n неприводимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим произвольный вектор $v \in V_n$ по базису $e_k = x^k y^{n-k}$ и обозначим через m наибольший из номеров базисных векторов, входящих в это разложение с ненулевым коэффициентом. В силу формул (6-5) векторы $X^k Y^m v$ с $0 \leq k \leq n$ являются ненулевыми кратными базисных векторов e_k . Следовательно, \mathfrak{sl}_2 -орбита любого вектора v линейно порождает всё пространство V_n . \square

ЛЕММА 6.1

В любом \mathfrak{sl}_2 -модуле операторы X и Y переводят каждое собственное подпространство оператора H с собственным значением λ в в собственные подпространства оператора H с собственными значениями $\lambda + 2$ и $\lambda - 2$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь соотношениями $HX - XH = 2X$ и $HY - YH = -2Y$, получаем для вектора v с $Hv = \lambda v$ равенства $HXv = XHv + 2Xv = (\lambda + 2)Xv$ и $HYv = YHv - 2Yv = (\lambda - 2)Yv$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1

Собственные значения оператора H на неприводимом модуле V называются *весами*, а собственные векторы — *весовыми векторами*. Весовые векторы, находящиеся в ядре оператора X называются *примитивными*.

ЛЕММА 6.2

Любой конечномерный \mathfrak{sl}_2 -модуль над алгебраически замкнутым полем обладает примитивным вектором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный весовой вектор v и подействуем на него возрастающими степенями оператора X . Получающиеся векторы Xv, X^2v, \dots тоже являются весовыми со строго возрастающими весами. Поскольку у H имеется лишь конечное число ненулевых собственных подпространств с различными собственными значениями, в этой цепочке имеется конечное число ненулевых векторов. Последний из них и будет примитивным. \square

ЛЕММА 6.3

Вес каждого примитивного вектора в любом конечномерном \mathfrak{sl}_2 -модуле над произвольным полем характеристики нуль является натуральным числом, и \mathfrak{sl}_2 -орбита примитивного вектора веса m изоморфна стандартному модулю V_m .

Доказательство. Пусть $Hv = \lambda v$ и $Xv = 0$. По лем. 6.1 векторы v, Yv, Y^2v, \dots являются собственными для H с собственными числами $\lambda, (\lambda-2), (\lambda-4), \dots$. Поэтому существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $Y^{m+1}v = 0$, а $Y^m v \neq 0$. Обозначим этот последний ненулевой вектор через v_0 , а его предшественников — через v_1, v_2, \dots , так что вся цепочка примет вид

$$0 \xleftarrow{Y} v_0 \xleftarrow{Y} v_1 \xleftarrow{Y} v_2 \xleftarrow{Y} \dots \xleftarrow{Y} v_{m-1} \xleftarrow{Y} v_m \xrightarrow{X} 0$$

Оператор H действует на эту цепочку по формуле $Hv_i = (\lambda - 2(m-i))v_i$. Пользуясь соотношением $XY = YX + H$, вычисляем действие на цепочку оператора X :

$$\begin{aligned} Xv_m &= 0 \\ Xv_{m-1} &= XYv_m = YXv_m + Hv_m = \lambda v_m \\ Xv_{m-2} &= XYv_{m-1} = YXv_{m-1} + Hv_{m-1} = (2\lambda - 2)v_{m-1} \\ Xv_{m-3} &= XYv_{m-2} = YXv_{m-2} + Hv_{m-2} = (3\lambda - (2+4))v_{m-2} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ Xv_{m-k} &= XYv_{m-k+1} = YXv_{m-k+1} + Hv_{m-k+1} = \\ &= (k\lambda - (2+4+\dots+2(k-1)))v_{m-k+1} = k(\lambda - k + 1)v_{m-k+1} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ Xv_0 &= m(\lambda - m + 1)v_1 \end{aligned}$$

Следующий такой шаг даёт нулевой вектор

$$0 = XYv_0 = YXv_0 + Hv_0 = (m+1)(\lambda - m)v_0,$$

что возможно только при $\lambda = m$. В этом случае операторы X, Y, H действуют по формулам $X(v_k) = (m-k)(k+1)v_{k+1}$, $Y(v_k) = v_{k-1}$, $H(v_k) = (2k-m)v_k$ и отображение $v_k \mapsto \frac{1}{k!}x^k y^{m-k}$ отождествляет линейную оболочку векторов v_k с модулем V_m . \square

ТЕОРЕМА 6.1

Конечномерные неприводимые \mathfrak{sl}_2 -модули над любым полем \mathbb{k} характеристики нуль исчерпываются стандартными модулями V_n .

Доказательство. Обозначим через $\overline{\mathbb{k}} \subset \mathbb{k}$ какое-нибудь алгебраическое замыкание поля \mathbb{k} и рассмотрим тензорное произведение $\overline{V} = \overline{\mathbb{k}} \otimes V$ векторных пространств над полем $\overline{\mathbb{k}}$. Правило $\lambda \cdot (\mu \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda\mu) \otimes v$ наделяет \overline{V} структурой векторного пространства над полем $\overline{\mathbb{k}}$, и любой \mathbb{k} -линейный оператор $F : V \rightarrow V$ продолжается до $\overline{\mathbb{k}}$ -линейного оператора $\overline{F} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id} \otimes F : \overline{V} \rightarrow \overline{V}$ (эта конструкция является непосредственным обобщением комплексификации вещественных векторных пространств).

УПРАЖНЕНИЕ 6.8. Покажите, что для любого базиса e_1, e_2, \dots, e_n пространства V над \mathbb{k} векторы $\overline{e}_p = 1 \otimes e_p$ образуют базис пространства \overline{V} над $\overline{\mathbb{k}}$, и матрица оператора \overline{F} в этом базисе совпадает с матрицей F в базисе e_p

Если пространство V является \mathfrak{sl}_2 -модулем, то пространство \bar{V} также является \mathfrak{sl}_2 -модулем относительно действия операторов \bar{X} , \bar{Y} и \bar{H} . В силу предыдущей леммы у оператора \bar{H} существует целое собственное число. По [упр. 6.8](#) оно является собственным числом и для оператора H на пространстве V . Повторяя рассуждения из доказательства [лем. 6.2](#), заключаем, что в пространстве V имеется примитивный вектор, и тогда по [лем. 6.3](#) он порождает в V стандартный \mathfrak{sl}_2 -подмодуль, который должен совпасть со всем V , поскольку V неприводимо. \square

УПРАЖНЕНИЕ 6.9. Докажите, что в любом конечномерном \mathfrak{sl}_2 -модуле над любым полем \mathbb{k} характеристики нуль оператор H диагонализуем и имеет целые собственные значения, а операторы X и Y нильпотентны.

6.3. Полная приводимость \mathfrak{sl}_2 -модулей. Сопоставление матрице $F \in \mathfrak{sl}_2$ оператора коммутирования $\text{ad}_F : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{sl}_2$, $Z \mapsto [F, Z]$, задаёт *присоединённое представление* $\text{ad} : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End}(\mathfrak{sl}_2)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.10. Проверьте, что $\text{ad}_{[F,G]} = [\text{ad}_F, \text{ad}_G]$ и что $\text{End}(\mathfrak{sl}_2)$ является \mathfrak{sl}_2 -модулем относительно действия $F : \varphi \mapsto [\text{ad}_F, \varphi]$.

На ассоциативной алгебре $\text{End}(\mathfrak{sl}_2)$ имеется каноническая симметричная билинейная форма следа $\text{tr}(\varphi\psi)$. Её ограничение на образ присоединённого представления задаёт на \mathfrak{sl}_2 невырожденную симметричную билинейную *форму Киллинга*

$$(F, G) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(\text{ad}_F \circ \text{ad}_G).$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.11. Проверьте, что её матрица Грама в базисе X, Y, H равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, двойственным к базису X, Y, H относительно формы Киллинга является базис

$$X^* = \frac{1}{4}Y, \quad Y^* = \frac{1}{4}X, \quad H^* = \frac{1}{8}H.$$

Форма Киллинга отождествляет \mathfrak{sl}_2 с \mathfrak{sl}_2^* , переводя векторы F в ковекторы $G \mapsto (F, G)$. Это отождествление продолжается до изоморфизма

$$\text{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2, \quad (6-6)$$

тождественного по второму тензорному сомножителю и переводящему тождественный эндоморфизм пространства \mathfrak{sl}_2 в *тензор Казимира*

$$X^* \otimes X + Y^* \otimes Y + H^* \otimes H = \frac{1}{4}(X \otimes Y + Y \otimes X) + \frac{1}{8}H \otimes H.$$

Каждое линейное представление $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End}(V)$ продолжается до представления

$$\bar{\varrho} : \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End}(V), \quad \bar{\varrho}(A \otimes B) = \varrho(A)\varrho(B).$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.12. Проверьте, что композиция представления $\tilde{\varrho}$ с изоморфизмом (6-6) является гомоморфизмом \mathfrak{sl}_2 -модулей¹ $\text{End}(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow \text{End}(V)$.

Представление $\tilde{\varrho}$ переводит тензор Казимира в оператор²

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4} (XY + YX) + \frac{1}{8} H^2,$$

который называется *оператором Казимира*. Из предыдущего упражнения вытекает, что $K \in \text{End}_{\mathfrak{sl}_2}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.13. Убедитесь прямым вычислением, что K коммутирует с X, Y, H и действует на стандартном неприводимом модуле V_m гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{8}(m^2 + 2m)$.

ЛЕММА 6.4

В любом конечномерном \mathfrak{sl}_2 -модуле V к каждому подмодулю U коразмерности 1 имеется дополнительный 1-мерный тривиальный \mathfrak{sl}_2 -подмодуль L , такой что $V = U \oplus L$.

Доказательство. Всякий одномерный \mathfrak{sl}_2 -модуль с неизбежностью тривиален, ибо в коммутативной алгебре эндоморфизмов одномерного векторного пространства все коммутаторы нулевые, и значит, $H = [X, Y] = 0$, $2X = [H, X] = 0$, $2Y = [Y, H] = 0$. В частности, фактор модуль V/U по любому подмодулю $U \subset V$ коразмерности 1 тривиален, т. е. все три оператора X, Y, H переводят V в U .

Строить дополнительный к U тривиальный одномерный подмодуль L мы будем индуктивно по $\dim U$. Если подмодуль U тривиален, то и весь модуль V тривиален, т. к. по предыдущему замечанию $\mathfrak{sl}_2 V = [\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2] V \subset \mathfrak{sl}_2 \mathfrak{sl}_2 V \subset \mathfrak{sl}_2 U = 0$. В этом случае любое дополнительное к U одномерное подпространство $L \subset V$ является искомым подмодулем. Если $U \simeq V_m$ нетривиален и неприводим, оператор $\frac{8}{m^2+2m} K$ является согласно упр. 6.13 \mathfrak{sl}_2 -инвариантным проектором V на U , и искомым дополнительный подмодуль $L = \ker K$. Если же подмодуль U приводим, мы выберем в нём ненулевой неприводимый подмодуль $W \subsetneq U$ и сначала по индуктивному предположению построим \mathfrak{sl}_2 -инвариантное разложение фактор модуля $(V/W) = (U/W) \oplus (\tilde{L}/W)$, в котором \mathfrak{sl}_2 -подмодуль $\tilde{L} \subset V$ таков, что $L \cap U = W$ и $\dim(L/W) = 1$, а затем, применяя индуктивное предположение к паре $W \subset \tilde{L}$, построим инвариантное разложение $\tilde{L} = W \oplus L$. Тривиальный 1-мерный подмодуль $L \subset \tilde{L} \subset V$ является искомым дополнением к U . \square

ТЕОРЕМА 6.2

Всякий конечномерный \mathfrak{sl}_2 -модуль V вполне приводим, т. е. является прямой суммой стандартных простых модулей V_m из прим. 6.1 на стр. 79.

¹действие \mathfrak{sl}_2 на $\text{End}(\mathfrak{sl}_2)$ задаётся коммутированием с присоединённым действием, а действие на $\text{End}(V)$ задаётся коммутированием с действием на V

²далее мы, как и ранее, опускаем символ ϱ , обозначим буквами X, Y, Z образы базисных операторов \mathfrak{sl}_2 в представлении ϱ

Доказательство. Чтобы построить \mathfrak{sl}_2 -инвариантный проектор модуля V на произвольный его подмодуль $U \subset V$, рассмотрим в \mathfrak{sl}_2 -модуле $\text{Hom}(V, U)$ подпространство $W = \{\varphi : \varphi|_U \in \mathbb{k} \cdot \text{Id}_U\}$, а в нём — подпространство $W' = \{\varphi \in W : \varphi|_U = 0\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.14. Убедитесь, что W и W' являются \mathfrak{sl}_2 -подмодулями в $\text{Hom}(V, U)$ и коразмерность W' в W равна 1.

По предыдущей лемме $W = W' \oplus L$, для некоторого тривиального \mathfrak{sl}_2 -модуля $L \subset W$. Искомый проектор $V \rightarrow U$ является базисный вектор подмодуля L , откалиброванный так, чтобы его ограничение на U было тождественным оператором. \square

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 6.5. Первое утверждение является следствием тождества Якоби, второе достаточно проверять на разложимых тензорах.

Упр. 6.6. Прямая $t \mapsto E + tA$ касается квадрики $\det X = 1$ в точке E тогда и только тогда квадратный трёхчлен $\det(E + tA) - 1 = \det(A) \cdot t^2 + \operatorname{tr}(A) \cdot t$ имеет кратный корень в нуле.

Упр. 6.8. Если $V = \mathbb{k} \cdot e_1 \oplus \mathbb{k} \cdot e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{k} \cdot e_n$, то $\bar{\mathbb{k}} \otimes V \simeq \bar{\mathbb{k}} \cdot e_1 \oplus \bar{\mathbb{k}} \cdot e_2 \oplus \dots \oplus \bar{\mathbb{k}} \cdot e_n$ в силу канонического изоморфизма дистрибутивности из [предл. 1.3](#) на стр. 13.