

§11. Аффинная алгебраическая геометрия

11.1. Системы полиномиальных уравнений. Всякое множество полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad f_\nu \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad (11-1)$$

имеет те же решения, что и система уравнений, левые части которых составляют в $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеал $J = (x_\nu)$, порождённый многочленами f_ν . В силу нётеровости кольца многочленов эта большая система, в свою очередь, эквивалентна конечному множеству уравнений, отвечающих образующим идеала J , причём образующие можно выбрать из первоначальной системы (11-1). Таким образом, любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны, системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал.

Множество $V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \quad \forall f \in J\}$ всех решений системы (11-1), левые части f_ν которой пробегают идеал $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом J . Отметим, что это множество может оказаться пустым: например, это так, когда $J = (1) = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ содержит уравнение $1 = 0$.

Для произвольной фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на Φ , образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \quad \forall p \in \Phi\}$$

и называется *идеалом фигуры* Φ . Множество нулей $V(I(\Phi))$ этого идеала — наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее Φ .

Для любого идеала $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеется тавтологическое включение

$$J \subset I(V(J)).$$

Вообще говоря, оно строгое: например, при $n = 1$ для идеала $J = (x^2)$ многообразие $V(J) = \{0\}$, тогда как идеал $I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J$.

ТЕОРЕМА 11.1 (NULLSTELLENSATZ, или ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О НУЛЯХ)

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} для любого идеала $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеют место *слабая теорема о нулях*: $V(J) = \emptyset \iff 1 \in J$ и *сильная теорема о нулях*:

$$f \in I(V(J)) \iff f^m \in J \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного¹ идеала $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ указать точку $p \in \mathbb{A}^n$, в которой зануляются все многочлены из J . Если имеется необратимый по модулю J многочлен $g \notin J$, идеал $J' = (J, g)$ не содержит 1 и строго больше, чем J . Поскольку увеличение идеала J только усложняет нам задачу, мы можем заменить J на J' . В виду нётеровости кольца многочленов конечное число таких расширений приведёт нас к *максимальному*

¹т. е. отличного от всего кольца многочленов

собственному идеалу J , фактор по которому $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/J$ является полем. Поскольку это поле конечно порождено как \mathbb{k} -алгебра, каждый его элемент ϑ алгебраичен над \mathbb{k} , т. е. удовлетворяет уравнению $\mu(\vartheta) = 0$, где $\mu(t) \in \mathbb{k}[t]$ — неприводимый приведённый многочлен. Так как поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, многочлен μ линеен, а значит, $\vartheta \in \mathbb{k}$. Таким образом, $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/J = \mathbb{k}$, т. е. любой многочлен $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним по модулю идеала J с некоторой константой. Пусть переменная x_i сравнима с $p_i \in \mathbb{k}$. Так как редукция по модулю J является гомоморфизмом, каждый многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(p_1, p_2, \dots, p_n) \pmod{J}$. Следовательно, все многочлены $f \in J$ зануляются в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, что и требовалось.

Докажем второе утверждение. При $V(J) = \emptyset$ оно тривиально, поэтому мы будем считать, что $V(J) \neq \emptyset$, т. е. $J \neq (1)$. Вложим \mathbb{A}^n в большее пространство \mathbb{A}^{n+1} с координатами $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Коль скоро многочлен $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset \mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ тождественно обращается в нуль на $V(J)$, многочлен $g(t, x) = 1 - tf(x)$ тождественно равен единице на цилиндре $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Поэтому порождённый J и многочленом $g(t, x)$ идеал в $\mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеет пустое множество нулей в \mathbb{A}^{n+1} и по слабой теореме о нулях содержит единицу, т. е. существуют такие $q_0, q_1, \dots, q_s \in \mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f_1, f_2, \dots, f_s \in J$, что

$$q_0(x, t) \cdot (1 - tf(x)) + q_1(t, x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x, t) \cdot f_s(x) = 1.$$

Применяя к этому равенству гомоморфизм $\mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, действующий на переменные по правилам $t \mapsto 1/f(x)$, $x_\nu \mapsto x_\nu$, получаем равенство

$$q_1(1/f(x), x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(1/f(x), x) \cdot f_s(x) = 1$$

в поле рациональных функций $\mathbb{k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Так как идеал J не содержит единицы, некоторые из $q_\nu(1/f(x), x)$ имеют нетривиальные знаменатели, причём в качестве общего знаменателя всех $q_\nu(1/f(x), x)$ можно взять некоторую степень f^m . Умножая обе части равенства на эту степень получаем

$$f^m(x) = \tilde{q}_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + \tilde{q}_s(x) \cdot f_s(x)$$

для некоторых $\tilde{q}_\nu \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. □

11.2. Аффинный алгебро-геометрический словарь. Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто. Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем \mathbb{k} , образуют категорию $\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}$, морфизмами в которой являются такие отображения $\varphi : X \rightarrow Y$ из аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$, которые задаются в координатах формулой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$, где $\varphi_i(x) \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ являются многочленами. Такие отображения называются *регулярными* или *полиномиальными*. В частности, функция $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ регулярна, если она является ограничением на X некоторого многочлена $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Регулярные функции на X образуют конечно порождённую приведённую¹ \mathbb{k} -алгебру, которая обозначается

$$\mathbb{k}[X] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X), \quad (11-2)$$

¹ коммутативная алгебра (или кольцо) называется *приведённой*, если в ней нет нильпотентов — таких ненулевых элементов a , что $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$

где $I(X) = \{f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$ — идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на X .

ЛЕММА II.1

Всякая конечно порождённая приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} изоморфна координатной алгебре $A = \mathbb{k}[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X .

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры $A = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что $\forall f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad f^n \in I \Rightarrow f \in I$. По сильной теореме о нулях это равносильно тому, что $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $V(I) \subset \mathbb{A}^n$. \square

11.2.1. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан гомоморфизм вычисления $ev_p : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}, f \mapsto f(p)$. Переводя единицу в единицу, он эпиморфен, т. е. является факторизацией по модулю своего ядра $\mathfrak{m}_p \stackrel{\text{def}}{=} \ker ev_p = I(\{p\}) = \{f \in \mathbb{k}[X] \mid f(p) = 0\}$:

$$ev_p : \mathbb{k}[X] \twoheadrightarrow \frac{\mathbb{k}[X]}{\mathfrak{m}_p} \simeq \mathbb{k}, \quad f \mapsto f \pmod{\mathfrak{m}_p} = f(p) \in \mathbb{k}.$$

Так как фактор $\mathbb{k}[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{k}$ является полем, идеал $\mathfrak{m}_p \subset \mathbb{k}[X]$ максимален. Он называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$.

Множество всех максимальных идеалов произвольной \mathbb{k} -алгебры A называется её *максимальным спектром* и обозначается $\text{Spec}_m(A)$. Каждой точке $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_m A$ отвечает гомоморфизм факторизации $\pi_{\mathfrak{m}} : A \rightarrow A/\mathfrak{m}, a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$, принимающий значения в поле $A/\mathfrak{m} \supset \mathbb{k}$. Если алгебра A конечно порождена, поле A/\mathfrak{m} тоже конечно порождено как \mathbb{k} -алгебра. Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} это влечёт за собой равенство $A/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$, что позволяет интерпретировать элементы *любой* конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем как функции на $\text{Spec}_m A$ со значениями в поле \mathbb{k} .

ЛЕММА II.2

Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} соответствия $p \mapsto ev_p \mapsto \mathfrak{m}_p = \ker(ev_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X , гомоморфизмами $\mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}$, тождественными на \mathbb{k} , и максимальными идеалами алгебры $\mathbb{k}[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше¹. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker ev_p = I(\{p\})$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$

¹отметим, что и над алгебраически незамкнутым полем \mathbb{k} сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ вкладывает множество тождественных на поле \mathbb{k} гомоморфизмов $\varphi : A \rightarrow \mathbb{k}$ в множество максимальных идеалов алгебры A , однако над незамкнутым полем *не все* максимальные идеалы в A являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в поле \mathbb{k} : например, ядро гомоморфизма вычисления $ev_i : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(i)$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, является максимальным идеалом \mathbb{R} -алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$, поскольку $\text{codim}_{\mathbb{R}} \ker ev_i = 2$

всегда¹ можно указать аффинно линейную функцию $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{k}$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q . Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \text{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, рассмотрим полный прообраз $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеала \mathfrak{m} . Поскольку $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/\tilde{\mathfrak{m}} = \mathbb{k}[X]/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$, идеал $\tilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях $V(\tilde{\mathfrak{m}}) \neq \emptyset$, т. е. $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_p$ для некоторой точки $p \in \mathbb{A}^n$. Поскольку $I(X) \subset \tilde{\mathfrak{m}}$, точка $p \in X$. Так как \mathfrak{m} максимален, включение $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_p$ влечёт равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1

Множество нильпотентных элементов² $\mathfrak{n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$ произвольного коммутативного кольца A называется *нильрадикалом* этого кольца.

УПРАЖНЕНИЕ 11.1. Убедитесь, что нильрадикал является идеалом в A .

СЛЕДСТВИЕ 11.1

Нильрадикал произвольной конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} совпадает с пересечением её максимальных идеалов:

$$\mathfrak{n}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Spec}_{\mathfrak{m}} A} \mathfrak{m}.$$

Иначе говоря, нильрадикал является ядром гомоморфизма из алгебры A в алгебру функций на $\text{Spec}_{\mathfrak{m}} A$, сопоставляющего элементу $a \in A$ функцию $\mathfrak{m} \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$.

Доказательство. Для любого максимального идеала \mathfrak{m} фактор A/\mathfrak{m} является полем, поэтому класс любого нильпотента в нём равен нулю. Тем самым, нильрадикал лежит в пересечении всех максимальных идеалов. Наоборот, поскольку фактор алгебра $A_{\text{red}} \stackrel{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$ приведена, она имеет вид $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ для некоторого аффинного многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и элементы алгебры A отождествляются с полиномиальными функциями на X . Если такая функция f лежит в каждом максимальном идеале, то $f(p) = 0$ для всех точек $p \in X$, т. е. $f \in I(X)$ является нулевым элементом алгебры $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 11.2*. Покажите, что нильрадикал произвольного коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов этого кольца.

11.2.2. Антиэквивалентность категорий. Со всяким отображением множеств $\varphi : X \rightarrow Y$ связан гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}^Y \rightarrow \mathbb{k}^X$, $f \mapsto f \circ \varphi$, действующий из алгебры \mathbb{k}^Y всех функций $Y \rightarrow \mathbb{k}$ в алгебру \mathbb{k}^X всех функций $X \rightarrow \mathbb{k}$. Если аффинные многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ имеют координатные алгебры $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ и $\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y)$, а отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ задаётся в координатах формулой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$, то

¹ в том числе, над не замкнутым полем

² вместе с нулевым элементом

$\varphi^*(y_i) = \varphi_i$, и регулярность φ , означающая, что $\varphi_i(x) \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, равносильна тому, что¹ $\varphi^*(\mathbb{k}[Y]) \subset \mathbb{k}[X]$, т. е. что поднятие регулярной функции на Y является регулярной функцией на X .

УПРАЖНЕНИЕ 11.3. Проверьте, что теоретико-множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких или аналитических многообразий) $X \rightarrow Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру непрерывных функций $C^0(Y) \subset \mathbb{R}^Y$ (соотв. подалгебру гладких или аналитических функций на Y) в подалгебру непрерывных функций $C^0(X)$ (соотв. в подалгебру гладких или аналитических функций на X).

ТЕОРЕМА 11.2

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} контравариантный функтор

$$\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}^{\text{opp}}, \quad X \mapsto \mathbb{k}[X] = \text{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{A}^1), \quad (11-3)$$

переводящий регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ аффинных многообразий в гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$, задаёт эквивалентность категорий $\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}$ и $\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}^{\text{opp}}$.

Доказательство. Согласно лем. 9.1 на стр. 122 достаточно убедиться, что функтор (11-3) по-существу сюръективен и вполне строг. Первое было установлено в лем. 11.1 на стр. 148. Для доказательства второго рассмотрим функтор

$$\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{S}et, \quad A \mapsto \text{Spec}_{\mathfrak{m}} A = \text{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}}(A, \mathbb{k}), \quad (11-4)$$

переводящий гомоморфизм алгебр $\psi : A \rightarrow B$ в отображение поднятия

$$\psi^* : \text{Spec}_{\mathfrak{m}} B \rightarrow \text{Spec}_{\mathfrak{m}} A,$$

которое сопоставляет эпиморфизму $\text{ev} : B \rightarrow \mathbb{k}$ с ядром $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_{\mathfrak{m}} B$ эпиморфизм $\psi^*(\text{ev}) = \text{ev} \circ \psi$ с ядром $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \text{Spec}_{\mathfrak{m}} \mathbb{k}[X]$. Очевидно, что $\varphi^{**} = \varphi$ и $\psi^{**} = \psi$, т. е. отображения

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}}(X, Y) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi^*} \\ \xleftarrow{\psi^* \mapsto \psi} \end{array} \text{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}[Y], \mathbb{k}[X])$$

являются взаимно обратными биекциями. □

УПРАЖНЕНИЕ 11.4. Убедитесь в этом.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. Согласно лем. 11.2 функтор (11-4) почти квазиобратен к функтору (11-3): применяя его к координатной алгебре $A = \mathbb{k}[X]$, мы получаем множество $\text{Spec}_{\mathfrak{m}} A$ точек многообразия X . Однако на этом множестве имеется много разных, хотя и изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать такую структуру как вложение $\varphi : \text{Spec}_{\mathfrak{m}} A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ с сюръективным

¹обратите внимание, что включение $\varphi(X) \subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*(I(Y)) \subset I(X)$, означающее, что правило $y_i \mapsto \varphi_i$ корректно задаёт гомоморфизм фактор алгебр $\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y) \rightarrow \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \mathbb{k}[X]$

гомоморфизмом поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}[\mathbb{A}^n] \rightarrow A$, отождествляющее $\text{Spec}_m A$ с аффинным алгебраическим многообразием $V(\ker \varphi^*) \subset \mathbb{A}^n$. Фиксация таковой структуры равносильна выбору конкретного задания алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$.

ПРИМЕР 11.1 (ПРЯМАЯ И ГИПЕРБОЛА)

Точки спектра $\text{Spec}_m \mathbb{k}[t]$ биективно соответствуют точкам $p \in \mathbb{A}^1 = \mathbb{k}$: всякий гомоморфизм $\text{ev} : \mathbb{k}[t] \rightarrow \mathbb{k}$ однозначно определяется своим значением $\text{ev}(t) = p \in \mathbb{k}$ на образующей t . Соответственно, максимальные идеалы $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[t]$ суть главные идеалы вида $(t - p)$. Аналогично, точки спектра алгебры полиномов Лорана $\text{Spec}_m \mathbb{k}[t, t^{-1}]$ отождествляется с дополнением до нуля $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{k}^*$, поскольку значение $p = \text{ev}(t) = 1/\text{ev}(t^{-1})$ должно быть обратимым элементом поля \mathbb{k} . С другой стороны, алгебру полиномов Лорана можно задать образующими и соотношениями: имеется изоморфизм $\varphi^* : \mathbb{k}[t, t^{-1}] \simeq \mathbb{k}[x, y]/(xy - 1)$, $t \mapsto x$, а $t^{-1} \mapsto y$. Алгебра $\mathbb{k}[x, y]/(xy - 1)$ это координатная алгебра гиперболы $xy = 1$ в \mathbb{A}^2 . Задаваемое гомоморфизмом φ отображение поднятия $\varphi : V(xy - 1) \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ проектирует гиперболу на координатную ось, отождествляя точки гиперболы с дополнением до нуля на этой оси.

УПРАЖНЕНИЕ 11.5. Пусть аффинное алгебраическое многообразие X является теоретико-множественным объединением двух непустых замкнутых непересекающихся подмножеств: $X = Y \sqcup Z$. Покажите, что $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[Y] \times \mathbb{k}[Z]$.

ПРИМЕР 11.2 (КОПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ)

Поскольку алгебра $\mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]$ является прямым произведением¹ в категории $\mathcal{Alg}_{\mathbb{k}}$ и очевидно конечно порождена и приведена, коль скоро таковыми являются $\mathbb{k}[X]$ и $\mathbb{k}[Y]$, максимальный спектр $\text{Spec}_m(\mathbb{k}[X] \times \mathbb{k}[Y]) \simeq X \sqcup Y$ является копроизведением² X и Y в противоположной категории $\mathcal{Aff}_{\mathbb{k}} \simeq \mathcal{Alg}_{\mathbb{k}}^{\text{opp}}$. Иными словами, дизъюнктное объединение аффинных алгебраических многообразий X и Y также является аффинным алгебраическим многообразием.

ПРИМЕР 11.3 (ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ)

Тензорное произведение \mathbb{k} -алгебр $A \otimes B$ определяется как тензорное произведение векторных пространств над \mathbb{k} . Умножение разложимых тензоров задаётся правилом $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.6. Убедитесь, что оно корректно задаёт на $A \otimes B$ структуру коммутативной \mathbb{k} -алгебры с единицей и что эта алгебра является копроизведением алгебр A и B в категории коммутативных \mathbb{k} -алгебр с единицами.

Универсальное свойство тензорного произведения задаёт теоретико-множественную биекцию $\text{Spec}_m(A) \times \text{Spec}_m(B) \simeq \text{Spec}_m(A \otimes B)$, переводящую пару гомоморфизмов вычисления $\text{ev}_p : A \rightarrow \mathbb{k}$, $\text{ev}_q : B \rightarrow \mathbb{k}$ в гомоморфизм $A \otimes B \rightarrow \mathbb{k}$, $a \otimes b \mapsto a(p)b(q)$. Если алгебры A и B конечно порождены, их тензорное произведение порождается всевозможными тензорными произведениями образующих алгебр A и B . Если алгебры A и B приведены, то $A \otimes B$ тоже приведена, поскольку всякий элемент $h \in A \otimes B$, задающий

¹ в смысле прим. 9.13 на стр. 125

² в смысле прим. 9.14 на стр. 125

нулевую функцию на $\text{Spec}_m(A \otimes B)$, равен нулю. Чтобы в этом убедиться, запишем h в виде $\sum f_\nu \otimes g_\nu$ с линейно независимыми над \mathbb{k} элементами $g_\nu \in B$. Из равенства $(\text{ev}_p \otimes \text{ev}_q)h = 0$, справедливого для всех $(p, q) \in \text{Spec}_m(A \otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p \in \text{Spec}_m A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$ является тождественно нулевой функцией на $\text{Spec}_m B$, и потому равна нулю, т. к. алгебра B приведена. Поэтому все $f_\nu(p) = 0$ для всех p , т. е. $f_\nu \in A$ задают нулевые функции на $\text{Spec}_m A$. Поскольку A приведена, $f_\nu = 0$, а значит, и $h = 0$. Таким образом, $\mathbb{k}[X] \otimes \mathbb{k}[Y]$ является копроизведением в $\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}$. Поэтому аффинное многообразие $\text{Spec}_m(\mathbb{k}[X] \otimes \mathbb{k}[Y])$ является произведением $X \times Y$ в категории $\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}$. Выше мы видели, что как множество оно совпадает с прямым произведением в $\mathcal{S}et$.

11.3. Топология Зарисского. На множестве $X = \text{Spec}_m A$ имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры A . Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в X , т. е. множества вида

$$V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I\} = \{\mathfrak{m} \in \text{Spec}_m A \mid I \subset \mathfrak{m}\},$$

для всевозможных идеалов $I \subset A$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.7. Убедитесь, что а) $\emptyset = V(1)$ б) $X = V(0)$ в) $\bigcap_\nu V(I_\nu) = V\left(\sum_\nu I_\nu\right)$, где идеал $\sum_\nu I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum_\nu f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$ г) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$, где¹ идеал IJ является \mathbb{k} -линейной оболочкой всевозможных произведений ab с $a \in I, b \in J$.

Топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости», и многие её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии. Скажем, топология Зарисского на $X \times Y$ тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y , поскольку замкнутые $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в X, Y : например, если $X = Y = \mathbb{A}^1$, то любая кривая, скажем, гипербола $V(xy - 1)$, замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, в то время как произведения замкнутых множеств на \mathbb{A}^1 исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и координатных прямых.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1 (БАЗА ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ И КОМПАКТНОСТЬ)

Каждое открытое подмножество аффинного алгебраического многообразия X является объединением конечного числа *главных открытых множеств*

$$\mathcal{D}(f) \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}, \quad \text{где } f \in \mathbb{k}[X],$$

и компактно².

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U = X \setminus V(I)$. Так как каждый идеал в $\mathbb{k}[X]$ конечно порождён, $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, а значит, $V(I) = \bigcap V(f_i)$, и $U = \bigcup (X \setminus V(f_i)) = \bigcup_\nu \mathcal{D}(f_i)$. Условие,

¹обратите внимание, что последнее равенство равносильно равенству $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$

²в том смысле, что в каждом его открытом покрытии содержится конечное подпокрытие

что U покрыто семейством множеств $\mathcal{D}(f_\nu)$, означает, что $X \setminus U \supset V(I)$, где I — идеал, порождённый функциями f_ν . Поскольку из них можно выбрать конечный набор, порождающий тот же идеал, любое покрытие главными открытыми множествами содержит конечное подпокрытие. \square

Предложение II.2 (непрерывность регулярных морфизмов)

Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}(V(I))$ замкнутого подмножества $V(I) \subset Y$ состоит из всех таких точек $x \in X$, что $f(\varphi(x)) = 0$ для всех $f \in I$. Тем самым, он является множеством нулей идеала, порождённого в $\mathbb{k}[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$. \square

11.3.1. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X , представимое в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ своих собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В обычной метрической топологии практически все пространства приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия X равносильна наличию делителей нуля в алгебре $\mathbb{k}[X]$, и неприводимые многообразия являются грубыми аналогами степеней простых чисел в арифметике.

Предложение II.3

Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда в его координатной алгебре $\mathbb{k}[X]$ нет делителей нуля.

Доказательство. Разложение $X = X_1 \cup X_2$, в котором каждое X_i замкнуто, непусто и отлично от X , означает наличие ненулевых необратимых $f_1 \in I(X_1)$ и $f_2 \in I(X_2)$. Произведение $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X , и значит, равно нулю в $\mathbb{k}[X]$. Наоборот, если $f_1 f_2 = 0$ в $\mathbb{k}[X]$, а оба f_i ненулевые, то они необратимы в $\mathbb{k}[X]$, и значит, оба замкнутых подмножества $V(f_1)$ и $V(f_2)$ непусты и отличны от X . При этом $X = V(f_1) \cup V(f_2)$. \square

Упражнение II.8. Убедитесь, что $V(f)$ непусто и отлично от X для всякого ненулевого необратимого многочлена $f \in \mathbb{k}[X]$.

Следствие II.2

Аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Теорема II.3

Каждое аффинное алгебраическое многообразие имеет единственное разложение в конечное объединение $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ неприводимых замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, таких что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. Разложение строится индуктивно: если X приводимо, мы в качестве первого шага представим его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ — собственные замкнутые подмножества. Если после нескольких шагов мы получим разложение $X = \bigcup Z_\nu$, в котором все Z_ν неприводимы, процесс заканчивается, и, выкидывая неприводимые

компоненты, содержащиеся в других неприводимых компонентах, мы получим требуемое разложение. В противном случае мы делаем следующий шаг, заменяя приводимые Z_ν объединениями их собственных замкнутых подмножеств. Если эта процедура не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots$, идеалы которых составят бесконечную строго возрастающую цепочку $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$, что противоречит нётеровости $\mathbb{k}[X]$.

Докажем единственность индукцией по наименьшему числу неприводимых компонент. Пусть X раскладывается на k компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение единственно. Если неприводимое замкнутое подмножество $Y \subset X$ лежит в объединении замкнутых подмножеств $Z_1 \cup Z_2$, то $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$, а значит, $Y \subset Z_1$ или $Y \subset Z_2$. Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$ влечёт включение $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β , откуда $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$. Выкинем из разложений X_1 и Y_α и применим предположение индукции к замыканиям оставшихся компонент. \square

УПРАЖНЕНИЕ 11.9. Пусть $Z \subsetneq Y \subset X$ замкнуты и Y неприводимо. Убедитесь, что $Y = \overline{Y \setminus Z}$ (замыкание берётся в X) и что неприводимость Y для этого существенна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2

Неприводимые замкнутые подмножества $X_i \subset X$, о которых идёт речь в теор. 11.3, называются *неприводимыми компонентами* многообразия X .

СЛЕДСТВИЕ 11.3

Элемент $f \in \mathbb{k}[X]$ делит нуль, если и только если он обращается в нуль на неприводимой компоненте многообразия X , но не на всём X .

ПРИМЕР 11.4 («БОЛЬШИЕ» ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА)

Топология Зарисского нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, иначе возникло бы разложение $X = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$. Иначе говоря, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём.

УПРАЖНЕНИЕ 11.10. Пусть X неприводимо и $f, g \in \mathbb{k}[X]$. Докажите, что если $f|_U = g|_U$ для некоторого непустого открытого $U \subset X$, то $f = g$ в $\mathbb{k}[X]$.

11.4. Рациональные функции. Элементы из $\mathbb{k}[X]$, не являющиеся делителями нуля, образуют мультипликативную систему¹ $S_X \subset \mathbb{k}[X]$. Кольцо частных² $\mathbb{k}[X]S_X^{-1}$ называется *кольцом рациональных функций* на X и обозначается $\mathbb{k}(X)$. Если X неприводимо, то $\mathbb{k}(X) = Q_{\mathbb{k}[X]}$ — это поле частных целостного кольца $\mathbb{k}[X]$.

¹напомним, что подмножество S в коммутативном кольце A с единицей называется *мультипликативной системой*, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$

²напомним, что кольцом частных AS^{-1} со знаменателями из мультипликативной системы S коммутативного кольца A с единицей (или *локализацией* A относительно S) называется фактор декартова произведения $A \times S$, элементы которого принято обозначать a/s и называть *дробями*, по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему равенства $a/s = (at)/(st)$ со всевозможными $a \in A$ и $s, t \in S$ (если Вы впервые с этим сталкиваетесь, то Вам следует убедиться, что $a_1/s_1 = a_2/s_2$ тогда и только тогда, когда $t(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ для некоторого $t \in S$, и

Говорят, что рациональная функция $f \in \mathbb{k}(X)$ определена в точке $x \in X$, если существует такое её представление дробью $f = p/q$, в котором $p, q \in \mathbb{k}[X]$, q не делит нуль, и $q(x) \neq 0$. Число $f(x) = p(x)/q(x) \in \mathbb{k}$ называется значением f в точке x .

УПРАЖНЕНИЕ 11.11. Убедитесь, что $f(x)$ не зависит от способа записи f в виде $f = p/q$ с $p, q \in \mathbb{k}[X]$, q не делящим нуль, и $q(x) \neq 0$.

Множество точек x , в которых определена рациональная функция f , называется областью определения функции f и обозначается $\text{Dom}(f)$. Из сл. 11.3 и прим. 11.4 вытекает, что $\text{Dom}(f)$ является плотным открытым подмножеством в X .

УПРАЖНЕНИЕ 11.12. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца $\mathbb{k}(X)$ достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в X .

Для открытого $U \subset X$ положим $\mathbb{k}[U] \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{k}(X) \mid \text{Dom}(f) \supset U\}$ и будем называть его кольцом рациональных функций, регулярных в U .

Предложение 11.4

Если $h \in \mathbb{k}[X]$ не делит нуля, то $\mathbb{k}[\mathcal{D}(h)] = \mathbb{k}[X][h^{-1}]$ является кольцом частных $\mathbb{k}[X]$ со знаменателями из мультипликативной системы $\{h^k\}_{k \geq 0}$.

Доказательство. Для рациональной функции $f \in \mathbb{k}(X)$ положим

$$(f^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \mathbb{k}[X] \mid gf \in \mathbb{k}[X]\}. \quad (11-5)$$

Это идеал в $\mathbb{k}[X]$, и лежащие в нём неделители нуля суть все возможные знаменатели, встречающиеся в разнообразных представлениях f в виде дроби. Делители нуля в (f^{-1}) суть пересечения этого идеала с идеалами $I(X_i)$ неприводимых компонент X_i многообразия X . Так как неделители нуля в (f^{-1}) по определению имеются, каждое из пересечений $(f^{-1}) \cap I(X_i) \subsetneq (f^{-1})$ является собственным векторным подпространством в (f^{-1}) , и весь идеал (f^{-1}) является объединением этих подпространств и подпространства, порождённого неделителями нуля. Если последнее подпространство тоже собственное, пространство (f^{-1}) оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем¹.

УПРАЖНЕНИЕ 11.13. Убедитесь в этом.

Таким образом, неделители нуля линейно порождают (f^{-1}) как векторное пространство над \mathbb{k} , и $X \setminus \text{Dom}(f) = V((f^{-1}))$. Включение $\mathcal{D}(h) \subset \text{Dom}(f)$ равносильно включению $V(h) \supset V((f^{-1}))$, т. е. занулению функции h на общих нулях всех знаменателей функции f . По теореме Гильберта о нулях $h^d \in (f^{-1})$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тем самым, $f = p/h^d$, где $p = h^d \cdot f \in \mathbb{k}[X]$. \square

что обычные правила сложения и умножения дробей задают на AS^{-1} структуру коммутативного кольца)

¹а алгебраически замкнутое поле бесконечно

11.4.1. Аффинность главных открытых множеств. Если $h \in \mathbb{k}[X]$ не делит нуль, то главное открытое подмножество $\mathcal{D}(h) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][h^{-1}] = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][t]/(1 - ht)$ всюду плотно в X и является аффинным алгебраическим многообразием: например, его можно реализовать замкнутой гиперповерхностью $V(1 - ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$. Вложение $i : \mathcal{D} \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом аффинных многообразий: его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение $i^* : \mathbb{k}[X] \hookrightarrow \mathbb{k}[X][h^{-1}] \simeq \mathbb{k}[\mathcal{D}(h)]$ и продолжается до изоморфизма колец частных $i^* : \mathbb{k}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{k}(\mathcal{D}(h))$.

Замечание II.2. Два разных толкования записи $\mathbb{k}[\mathcal{D}(h)]$ — как координатной алгебры абстрактного аффинного многообразия, коим является $\mathcal{D}(h)$, и как подкольца в $\mathbb{k}(X)$, состоящего из рациональных функций, определённых всюду в $\mathcal{D}(h) \subset X$, при этом согласованы друг с другом. В частности, согласованы друг с другом и два толкования обозначения $\mathbb{k}[X]$ — как координатной алгебры самого многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и как алгебры всюду регулярных рациональных функций:

$$\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) = \mathbb{k}[X] = \{f \in \mathbb{k}(X) \mid \text{Dom}(f) = X\}$$

что вытекает из [предл. 11.4](#) при $h = 1$ и отвечает несобственному $\mathcal{D}(h) = X$.

Предостережение II.1. Неглавное открытое подмножество $U \subset X$, вообще говоря, не является аффинным подмногообразием: каноническое вложение $U \hookrightarrow \text{Spec}_m \mathbb{k}[U]$, сопоставляющее точке $u \in U$ её максимальный идеал $\mathfrak{m}_u = \ker \text{ev}_u \subset \mathbb{k}[U]$, может быть не биективно.

Упражнение II.14. Пусть $n \geq 2$ и $U = \mathbb{A}^n \setminus O$ — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что $\mathbb{k}[U] = \mathbb{k}[\mathbb{A}^n]$ и, тем самым, $\text{Spec}_m \mathbb{k}[U] = \mathbb{A}^n \neq U$.

Предложение II.5

Пусть $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ — разложение аффинного алгебраического многообразия X на неприводимые компоненты. Тогда $\mathbb{k}(X) = \mathbb{k}(X_1) \times \mathbb{k}(X_2) \times \dots \times \mathbb{k}(X_k)$.

Доказательство. Выберем в идеале $I = I(\bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j)) \subset \mathbb{k}[X]$ функций, зануляющихся на всех попарных пересечениях различных неприводимых компонент многообразия X , какую-нибудь ненулевую функцию $f \in I$, не делящую нуль в $\mathbb{k}[X]$.

Упражнение II.15. Убедитесь, что I линейно порождается такими функциями над \mathbb{k} . Главное открытое подмножество $W = \mathcal{D}(f) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][f^{-1}] \subset X$ аффинно и является дизъюнктивным объединением подмножеств $W_i = W \cap X_i \subset X_i$. Каждое W_i является главным открытым подмножеством многообразия X_i и тоже аффинно:

$$W_i = \mathcal{D}(f_i) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i, \quad \text{где } f_i = f \pmod{I(X_i)} \in \mathbb{k}[X_i].$$

Согласно [упр. 11.5](#) $\mathbb{k}[W] \simeq \mathbb{k}[W_1] \times \mathbb{k}[W_2] \times \dots \times \mathbb{k}[W_k]$.

Упражнение II.16. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей: $(K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k)S_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k}^{-1} \simeq K_1 S_{K_1}^{-1} \times K_2 S_{K_2}^{-1} \times \dots \times K_k S_{K_k}^{-1}$. Таким образом, $\mathbb{k}(X) \simeq \mathbb{k}(W) \simeq \prod \mathbb{k}(W_i) \simeq \prod \mathbb{k}(X_i)$. \square

11.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр. Всякий гомоморфизм \mathbb{k} -алгебр $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\mathbb{k}[Y] \xrightarrow{\varphi_1^*} \mathbb{k}[Y]/\ker(\varphi^*) = \text{im}(\varphi^*) \xrightarrow{\varphi_2^*} \mathbb{k}[X]. \quad (11-6)$$

Поскольку алгебра $\mathbb{k}[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\mathbb{k}[X]$ приведена, алгебра

$$\mathbb{k}[Y]/\ker(\varphi^*) = \text{im}(\varphi^*) \subset \mathbb{k}[X]$$

тоже является конечно порождённой приведённой \mathbb{k} -алгеброй, отвечающей аффинному многообразию $Z = \text{Spec}_m(\text{im}(\varphi^*)) \simeq V(\ker(\varphi^*)) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма $\varphi_1^* : \mathbb{k}[Z] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ означает отсутствие ненулевых функций $f \in \mathbb{k}[Z]$, за нуляющихся на $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е. *плотность* $\varphi_1(X)$ в Z . Тем самым, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$ есть замыкание образа $\varphi(X)$ в многообразии Y , вложенное в Y как множество $V(\ker \varphi^*)$ нулей идеала $\ker \varphi^*$. Иными словами, алгебраическое разложение (11-6) геометрически означает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xrightarrow{\varphi_2} Y$$

регулярного морфизма $X \rightarrow Z$ с плотным образом и регулярного вложения Z в Y в качестве замкнутого подмногообразия.

11.5.1. Замкнутые вложения. Морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ сюръективен. Это означает, что φ является изоморфизмом между X и замкнутым подмногообразием

$$V(\ker \varphi^*) \subset Y.$$

Если замкнутое подмножество $Z \subset X$ неприводимо, гомоморфизм подъёма $i^* : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[Z]$, отвечающий замкнутому вложению $i : Z \hookrightarrow X$, принимает значения в целостном кольце $\mathbb{k}[Z]$, которое канонически вложено в своё поле частных $\mathbb{k}(Z)$. По универсальному свойству кольца частных $\mathbb{k}(X)$ эпиморфизм i^* однозначно продолжается до эпиморфизма

$$\text{ev}_Z : \mathbb{k}(X) \rightarrow \mathbb{k}(Z), \quad (11-7)$$

который ограничивает рациональные функции с X на Z и может интуитивно восприниматься как гомоморфизм вычисления рациональных функций на X в «в общей точке» неприводимого подмногообразия $Z \subset X$, где вычисляемая функция всегда определена, а результат такого вычисления лежит в поле $\mathbb{k}(Z)$.

В частности, когда $Z \subset X$ является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия X , из сюръективности гомоморфизма (11-7) вытекает, что всякая рациональная функция на Z является ограничением некоторой рациональной функции на X , т. е. записывается дробью вида p/q , знаменатель которой

$$q \pmod{I(X_i)} \in \mathbb{k}[X_i] = \mathbb{k}[X]/I(X_i)$$

представляется элементом $q \in \mathbb{k}[X]$, не делящим нуль в $\mathbb{k}[X]$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.17. Укажите такого представителя для функции $1/x \in \mathbb{k}(\text{Spec}_m \mathbb{k}[x])$ на прямой $Z = \text{Spec}_m \mathbb{k}[x] = V(y)$ координатного креста $X = \text{Spec}_m \mathbb{k}[x, y]/(xy)$ на плоскости $\mathbb{A}^2 = \text{Spec}_m \mathbb{k}[x, y]$.

11.5.2. Доминантные морфизмы. Если X неприводимо и гомоморфизм алгебр

$$\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$$

инъективен, то соответствующий морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *доминантным*. Как мы видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Если X приводимо, то морфизм φ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на каждую неприводимую компоненту многообразия X . В этом случае ограничение $\varphi_i = \varphi|_{X_i}$ морфизма φ каждую неприводимую компоненту $X_i \subset X$ задаёт вложение $\varphi_i^* : \mathbb{k}[Y] \hookrightarrow \mathbb{k}[X_i] \subset \mathbb{k}(X_i)$ в поле рациональных функций на X_i . По универсальному свойству кольца частных это вложение однозначно продолжается до вложения в то же поле кольца рациональных функций: $\mathbb{k}(Y) \hookrightarrow \mathbb{k}(X_i)$. Таким образом, каждый доминантный морфизм $X \rightarrow Y$ задаёт вложение

$$\mathbb{k}(Y) \hookrightarrow \prod \mathbb{k}(X_i) = \mathbb{k}(X).$$

УПРАЖНЕНИЕ 11.18. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ раскладывается в композицию

$$X \xrightarrow{\psi} Y \times \mathbb{A}^m \xrightarrow{\pi} Y, \quad (11-8)$$

где ψ — замкнутое вложение, а π — естественная проекция вдоль \mathbb{A}^m .

11.5.3. Конечные морфизмы. Наличие регулярного морфизма $\varphi : X \rightarrow Y$ позволяет рассматривать $\mathbb{k}[X]$ как алгебру над $\varphi^*(\mathbb{k}[Y]) = \mathbb{k}[\varphi(X)] \subset \mathbb{k}[X]$. Морфизм φ называется *конечным*, если алгебра $\mathbb{k}[X]$ является целой над своей подалгеброй $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$ или, что то же самое, если $\mathbb{k}[X]$ является конечно порождённым $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$ -модулем¹.

ЛЕММА 11.3

Любой конечный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ аффинных алгебраических многообразий переводит всякое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, и индуцированный морфизм $\varphi|_Z : Z \rightarrow \varphi(Z)$ тоже конечен. Кроме того, если X неприводимо, то $\varphi(Z) \neq Y$ ни для какого замкнутого $Z \neq X$.

Доказательство. Пусть $I = I(Z) \subset \mathbb{k}[X]$ — идеал замкнутого подмножества $Z \subset X$. Ограничение $\varphi|_Z : Z \rightarrow Y$ отвечает сквозному гомоморфизму алгебр

$$\varphi_Z^* : \mathbb{k}[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X]/I.$$

Поскольку алгебра $\mathbb{k}[X]$ конечно порождена как $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$ -модуль, алгебра $\mathbb{k}[Z] = \mathbb{k}[X]/I$ также конечно порождена как модуль над $\mathbb{k}[\varphi(Z)] = \varphi_Z^*(\mathbb{k}[Y]) = \varphi^*(\mathbb{k}[Y]) / (I \cap \varphi^*(\mathbb{k}[Y]))$. Тем самым, $Z \rightarrow \overline{\varphi(Z)}$ — конечный морфизм.

Равенство $\varphi(Z) = \overline{\varphi(Z)}$ достаточно доказывать отдельно для каждой неприводимой компоненты Z , причём ввиду предыдущего можно заменить X на Z , а Y на \overline{Z} .

¹т. е. $\exists f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$, такие что любой $h \in \mathbb{k}[X]$ записывается как $h = \sum \varphi^*(g_i) f_i$ с подходящими $g_i \in \mathbb{k}[Y]$

Итак, достаточно показать, что всякий конечный доминантный морфизм $\varphi : Z \rightarrow Y$ неприводимого аффинного многообразия Z сюръективен. На алгебраическом языке это означает, что для любого расширения алгебр $\mathbb{k}[Y] \subset \mathbb{k}[Z]$, такого что $\mathbb{k}[Z]$ не имеет делителей нуля и является конечно порождённым $\mathbb{k}[Y]$ модулем, всякий максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$ имеет вид $\tilde{\mathfrak{m}} \cap \mathbb{k}[Y]$ для некоторого собственного максимального идеала $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{k}[Z]$.

Если идеал $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{k}[Z]$, порождённый \mathfrak{m} в $\mathbb{k}[Z]$, является собственным в $\mathbb{k}[Z]$, то в качестве $\tilde{\mathfrak{m}}$ можно взять любой максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{k}[Z]$. Таким образом, мы должны показать, что $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{k}[Z] \neq \mathbb{k}[Z]$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$.

Предположим противное: что $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{k}[Z] = \mathbb{k}[Z]$ для какого-то собственного идеала $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$. Пусть функции f_1, f_2, \dots, f_m порождают $\mathbb{k}[Z]$ как $\mathbb{k}[Y]$ -модуль. Наше предположение означает, что каждую из них можно записать как $f_i = \sum_v f_v \beta_{vi}$ с $\beta_{vi} \in \mathfrak{m}$, или, в матричных обозначениях: $(f_1, f_2, \dots, f_m) \cdot (E - B) = 0$, где $B = (\beta_{vi}) \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathfrak{m})$, а E — единичная матрица. Тем самым, нулевой эндоморфизм $\mathbb{k}[Y]$ -модуля $\mathbb{k}[Z]$ представляется в образующих $\{f_v\}$ умножением на матрицу $E - B$. Поэтому умножение на $\det(E - B)$ тоже аннулирует¹ модуль $\mathbb{k}[Z]$. Так как в $\mathbb{k}[Z]$ нет делителей нуля, $\det(E - B) = 0$. Раскрывая этот определитель, заключаем, что $1 \in \mathfrak{m}$, т. е. $\mathfrak{m} = \mathbb{k}[Y]$ не является собственным.

Для доказательства неравенства $\varphi(Z) \neq Y$ при $Z \subsetneq X$ рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию $f \in \mathbb{k}[X]$, тождественно зануляющуюся вдоль Z , и запишем для неё целое уравнение над $\varphi^*(\mathbb{k}[Y])$ минимальной возможной степени:

$$f^m + \varphi^*(g_1) f^{m-1} + \dots + \varphi^*(g_{m-1}) f + \varphi^*(g_m) = 0.$$

Вычисляя его левую часть в точках $z \in Z$, получим $\varphi^*(g_m)|_z = g_m|_{\varphi(z)} \equiv 0$, но при этом $g_m \neq 0$ в $\mathbb{k}[Y]$, т. к. иначе мы могли бы сократить уравнение на f (ибо в $\mathbb{k}[X]$ нет делителей нуля). Таким образом, $\varphi(Z) \subset V(g_m) \subsetneq Y$. \square

11.5.4. Нормальные многообразия. Аффинное алгебраическое многообразие Y называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра $\mathbb{k}[Y]$ целостамкнута в поле рациональных функций $\mathbb{k}(Y) = Q_{\mathbb{k}[Y]}$, т. е. является *нормальным кольцом* в смысле [опр. 10.3](#). Например, любое аффинное многообразие с факториальной координатной алгеброй нормально. В частности, все аффинные пространства \mathbb{A}^n нормальны².

ЛЕММА 11.4

Всякий сюръективный конечный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ в нормальное многообразие Y открыт³ и сюръективно отображает каждую неприводимую компоненту X на Y .

Доказательство. отождествим $\mathbb{k}[Y]$ с подалгеброй в $\mathbb{k}[X]$ при помощи φ^* . Открытость φ означает, что образ любого главного открытого множества $\mathcal{D}(f) \subset X$ содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки, т. е. для любой функции

¹ в силу равенства $\det(E - B) \cdot E = (E - B) \cdot (E - B)^\vee$, где $(E - B)^\vee$ — присоединённая к $(E - B)$ матрица (транспонированная к матрице алгебраических дополнений)

² включая точку $\mathbb{A}^0 = \text{Spec}_m \mathbb{k}$

³ т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U \subset X$

$f \in \mathbb{k}[X]$ и любой точки $p \in X$, где $f(p) \neq 0$, мы должны указать такую функцию $a \in \mathbb{k}[Y]$, что на Y

$$\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$$

Для этого рассмотрим отображение $\psi = \varphi \times f : X \rightarrow Y \times \mathbb{A}^1$, $p \mapsto (\varphi(p), f(p))$. Его гомоморфизм поднятия $\psi^* : \mathbb{k}[Y \times \mathbb{A}^1] = \mathbb{k}[Y][t] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ есть вычисление полиномов от t с коэффициентами в $\mathbb{k}[Y]$ на элементе $f \in \mathbb{k}[X]$. По сл. 10.3 минимальный многочлен μ_f элемента f над полем $\mathbb{k}(Y)$ лежит в $\mathbb{k}[Y]$. Тем самым, ψ^* это факторизация по главному идеалу $(\mu_f) = \ker \psi^*$. Поэтому ψ конечен и сюръективно отображает X на гиперповерхность, заданную в $Y \times \mathbb{A}^1$ уравнением $\mu_f(y; t) = t^m + a_1(y)t^{m-1} + \dots + a_m(y) = 0$. В слое $\{\varphi(p)\} \times \mathbb{A}^1 \subset Y \times \mathbb{A}^1$ над точкой $\varphi(p) \in Y$ многочлен $\mu_f(\varphi(p); t) \in \mathbb{k}[t]$ имеет ненулевой корень $t = f(p)$. Стало быть, хоть один из его коэффициентов, скажем a_i , отличен от нуля в точке $\varphi(p)$. Над всеми точками $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$ коэффициент $a_i(q)$ также отличен от нуля, а значит, у многочлена $\mu_f(q; t) \in \mathbb{k}[t]$ также есть ненулевой корень. Следовательно, все эти точки q тоже лежат в образе множества $\mathcal{D}(f)$, т. е. $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$, как и требовалось.

Что касается ограничения φ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$, то для каждого i множество $U_i = X \setminus \bigcup_{v \neq i} X_v = X_i \setminus \bigcup_{v \neq i} (X_i \cap X_v)$ открыто в X и плотно в X_i . Поскольку

$\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y , откуда $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. \square

Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 11.1. Если $a^n = 0$ и $b^m = 0$, то $(a + b)^{m+n-1} = 0$ и $(ca)^n = 0$ для всех c .
- Упр. 11.4. Пусть аффинные многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ имеют координатные алгебры $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ и $\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y)$. Если регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ задаётся формулой $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$, где $\varphi_i(x) \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, то $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ действует на образующие алгебры $\mathbb{k}[Y]$ по правилу $y_i \mapsto \varphi_i \pmod{I(X)}$, причём включение $\varphi(X) \subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*(I(Y)) \subset I(X)$, означающее, что это правило корректно задаёт отображение из фактор алгебры $\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y)$. Дважды двойственное отображение $\varphi^{**} : \text{Spec}_m \mathbb{k}[X] \rightarrow \text{Spec}_m \mathbb{k}[Y]$ переводит гомоморфизм вычисления $\text{ev}_p : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}$, $f(x) \mapsto f(p)$, в точку $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in X$, в его композицию с φ^* . Эта композиция переводит образующую $y_i \in \mathbb{k}[Y]$ в число $\varphi_i(p)$, т. е. является гомоморфизмом вычисления в точке $\varphi(p)$. Тем самым $\varphi^{**} = \varphi$. Аналогично проверяется, что и наоборот, если задан гомоморфизм алгебр $\psi : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$, то $\psi^{**} = \psi$.
- Упр. 11.5. Это геометрическая версия китайской теоремы об остатках. Отображение $\varphi : \mathbb{k}[X] \hookrightarrow \mathbb{k}[Y] \times \mathbb{k}[Z]$, переводящее $f \in \mathbb{k}[X]$ в пару $(f|_Y, f|_Z)$, инъективно, т. к. $Y \cup Z = X$. По теореме Гильберта нулей идеал $I(Y) + I(Z) \subset \mathbb{k}[X]$, задающий в X пересечение $Y \cap Z = \emptyset$, содержит единицу, т. е. существуют такие $s \in I(Y)$ и $t \in I(Z)$, что $1 = s + t$. Тогда $\varphi(s) = \varphi(1 - t) = (0, 1)$ и $\varphi(t) = \varphi(1 - s) = (1, 0)$, а произвольная пара классов $(f \pmod{I(Y)}, g \pmod{I(Z)}) \in \mathbb{k}[Y] \times \mathbb{k}[Z]$ равна $\varphi(ft + gs)$, что означает сюръективность φ .
- Упр. 11.6. Поскольку формула для произведения разложимых тензоров билинейна, она корректно распространяется по линейности на неразложимые тензоры. Универсальные отображения $A \xrightarrow{\alpha} A \otimes B \xleftarrow{\beta} B$ действуют по правилам $\alpha(a) = a \otimes 1$ и $\beta(b) = 1 \otimes b$. Их универсальные свойства вытекают из универсальных свойств тензорного произведения: если заданы гомоморфизмы алгебр с единицами $\varphi : A \rightarrow C$ и $\psi : B \rightarrow C$, то отображение $A \times B \rightarrow C$, $(a, b) \mapsto \varphi(a) \cdot \psi(b)$, билинейно, а значит, однозначно пропускается через тензорное произведение $A \otimes B$.
- Упр. 11.7. Первые три равенства и включения $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$ очевидны.
- Упр. 11.8. Если $V(f) = X$, то $f \in I(X)$, и значит, $f = 0$ в $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. Если $V(f) = \emptyset$, то множество нулей идеала $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённого идеалом $I(X)$ и многочленом f пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что $1 \equiv sf \pmod{I(X)}$ для некоторого $s \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. f обратим в $\mathbb{k}[X]$.
- Упр. 11.10. Иначе $X = (X \setminus U) \cup V(f - g)$.
- Упр. 11.14. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$ и предл. 11.4.
- Упр. 11.15. Каждое пересечение $I \cap I(X_i)$ является собственным векторным подпространством в I , поскольку включение $I \subset I(X_v)$ означало бы, что $X_v \subset \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j)$, а это в силу непроводимости X_v влечёт включение $X_v \subset X_i \cap X_j$ для некоторых $i \neq j$, что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все делители нуля в I лежат в собственном подпространстве, то I оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. II.16. Элемент прямого произведения не делит нуль тогда и только тогда, когда каждая из его компонент не делит нуль: $S_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k}^{-1} = S_{K_1}^{-1} \times S_{K_2}^{-1} \times \dots \times S_{K_k}^{-1}$.

Упр. II.18. Пусть $A = \mathbb{k}[X]$, $B = \mathbb{k}[Y]$. Вложение $\varphi^* : B \hookrightarrow A$ задаёт на A структуру конечно порождённой B -алгебры, т. е. представляет A в виде $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$, что и утверждается.