§11. Аффинная алгебраическая геометрия

11.1. Системы полиномиальных уравнений. Всякое множество полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\,, \quad f_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]\,, \tag{11-1}$$

имеет те же решения, что и система уравнений, левые части которых составляют в $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеал $J = (x_\nu)$, порождённый многочленами f_ν. В силу нётеровости кольца многочленов эта большая система, в свою очередь, эквивалентна конечному множеству уравнений, отвечающих образующим идеала J, причём образующие можно выбрать из первоначальной системы (11-1). Таким образом, любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны, системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал.

Множество $V(J) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \quad \forall f \in J\ \}$ всех решений системы (11-1), левые части f_ν которой пробегают идеал $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом J. Отметим, что это множество может оказаться пустым: например, это так, когда $J = (1) = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ содержит уравнение $1 = 0$.

Для произвольной фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на Φ, образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi) \overset{\text{def}}{=} \{\, f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \quad \forall\, p \in \Phi\ \}$$

и называется *идеалом фигуры* Φ. Множество нулей $V(I(\Phi))$ этого идеала — наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее Φ.

Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеется тавтологическое включение

$$J \subset I(V(J))\,.$$

Вообще говоря, оно строгое: например, при $n = 1$ для идеала $J = (x^2)$ многообразие $V(J) = \{0\}$, тогда как идеал $I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J$.

Теорема 11.1 (Nullstellensatz, или теорема Гильберта о нулях)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеют место *слабая теорема о нулях*: $V(J) = \varnothing \iff 1 \in J$ и *сильная теорема о нулях*:

$$f \in I(V(J)) \iff f^m \in J \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\,.$$

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного[1] идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ указать точку $p \in \mathbb{A}^n$, в которой зануляются все многочлены из J. Если имеется необратимый по модулю J многочлен $g \notin J$, идеал $J' = (J, g)$ не содержит 1 и строго больше, чем J. Поскольку увеличение идеала J только усложняет нам задачу, мы можем заменить J на J'. В виду нётеровости кольца многочленов конечное число таких расширений приведёт нас к *максимальному*

[1] т. е. отличного от всего кольца многочленов

собственному идеалу J, фактор по которому $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J$ является полем. Поскольку это поле конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра, каждый его элемент ϑ алгебраичен над $\Bbbk$, т. е. удовлетворяет уравнению $\mu(\vartheta) = 0$, где $\mu(t) \in \Bbbk[t]$ — неприводимый приведённый многочлен. Так как поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, многочлен μ линеен, а значит, $\vartheta \in \Bbbk$. Таким образом, $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J = \Bbbk$, т. е. любой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним по модулю идеала J с некоторой константой. Пусть переменная x_i сравнима с $p_i \in \Bbbk$. Так как редукция по модулю J является гомоморфизмом, каждый многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(p_1, p_2, \dots, p_n) \pmod J$. Следовательно, все многочлены $f \in J$ зануляются в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, что и требовалось.

Докажем второе утверждение. При $V(J) = \varnothing$ оно тривиально, поэтому мы будем считать, что $V(J) \neq \varnothing$, т. е. $J \neq (1)$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в большее пространство $\mathbb{A}^{n+1}$ с координатами $(t,\, x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Коль скоро многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset \Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots, x_n]$ тождественно обращается в нуль на $V(J)$, многочлен $g(t, x) = 1 - t\,f(x)$ тождественно равен единице на цилиндре $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Поэтому порождённый J и многочленом $g(t, x)$ идеал в $\Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеет пустое множество нулей в $\mathbb{A}^{n+1}$ и по слабой теореме о нулях содержит единицу, т. е. существуют такие $q_0, q_1, \dots, q_s \in \Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f_1, f_2, \dots, f_s \in J$, что

$$q_0(x,t) \cdot \big(1 - tf(x)\big) + q_1(t,x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x,t) \cdot f_s(x) = 1\,.$$

Применяя к этому равенству гомоморфизм $\Bbbk[t,\, x_1, x_2, \dots, x_n] \to \Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_n)$, действующий на переменные по правилам $t \mapsto 1/f(x)$, $x_\nu \mapsto x_\nu$, получаем равенство

$$q_1\big(1/f(x)\,,\, x\big) \cdot f_1(x) + \dots + q_s\big(1/f(x)\,,\, x\big) \cdot f_s(x) = 1$$

в поле рациональных функций $\Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Так как идеал J не содержит единицы, некоторые из $q_\nu\big(1/f(x), x\big)$ имеют нетривиальные знаменатели, причём в качестве общего знаменателя всех $q_\nu\big(1/f(x), x\big)$ можно взять некоторую степень f^m. Умножая обе части равенства на эту степень получаем

$$f^m(x) = \widetilde{q}_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + \widetilde{q}_s(x) \cdot f_s(x)$$

для некоторых $\tilde{q}_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. □

11.2. Аффинный алгебро-геометрический словарик. Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем $\Bbbk$, образуют категорию $\mathcal{A}\mathit{ff}_{\Bbbk}$, морфизмами в которой являются такие отображения $\varphi : X \to Y$ из аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$, которые задаются в координатах формулой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\big)$, где $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ являются многочленами. Такие отображения называются *регулярными* или *полиномиальными*. В частности, функция $f : X \to \Bbbk$ регулярна, если она является ограничением на X некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Регулярные функции на X образуют конечно порождённую приведённую[1] $\Bbbk$-алгебру, которая обозначается

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathit{ff}_{\Bbbk}}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)\,, \qquad (11\text{-}2)$$

[1] коммутативная алгебра (или кольцо) называется *приведённой*, если в ней нет *нильпотентов* — таких ненулевых элементов a, что $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$

где $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$ — идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на X.

Лемма 11.1
Всякая конечно порождённая приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ изоморфна координатной алгебре $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X.

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что $\forall f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad f^n \in I \quad \Rightarrow \quad f \in I$. По сильной теореме о нулях это равносильно тому, что $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $V(I) \subset \mathbb{A}^n$. □

11.2.1. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан *гомоморфизм вычисления* $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(p)$. Переводя единицу в единицу, он эпиморфен, т. е. является факторицацией по модулю своего ядра $\mathfrak{m}_p \overset{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\}) = \{f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0\}$:

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \frac{\Bbbk[X]}{\mathfrak{m}_p} \simeq \Bbbk, \quad f \mapsto f \pmod{\mathfrak{m}_p} = f(p) \in \Bbbk.$$

Так как фактор $\Bbbk[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \Bbbk$ является полем, идеал $\mathfrak{m}_p \subset \Bbbk[X]$ максимален. Он называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$.

Множество всех максимальных идеалов произвольной $\Bbbk$-алгебры A называется её *максимальным спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A)$. Каждой точке $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ отвечает гомоморфизм факторизации $\pi_{\mathfrak{m}} : A \to A/\mathfrak{m}$, $a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$, принимающий значения в поле $A/\mathfrak{m} \supset \Bbbk$. Если алгебра A конечно порождена, поле $A/\mathfrak{m}$ тоже конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это влечёт за собой равенство $A/\mathfrak{m} = \Bbbk$, что позволяет интерпретировать элементы *любой* конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем как функции на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ со значениями в поле $\Bbbk$.

Лемма 11.2
Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \mapsto \mathrm{ev}_p \mapsto \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X, гомоморфизмами $\Bbbk[X] \to \Bbbk$, тождественными на $\Bbbk$, и максимальными идеалами алгебры $\Bbbk[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[1]. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\})$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$

[1]отметим, что и над алгебраически незамкнутым полем $\Bbbk$ сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ вкладывает множество тождественных на поле $\Bbbk$ гомоморфизмов $\varphi : A \to \Bbbk$ в множество максимальных идеалов алгебры A, однако над незамкнутым полем *не все* максимальные идеалы в A являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в поле $\Bbbk$: например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_i : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(i)$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, является максимальным идеалом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \ker \mathrm{ev}_i = 2$

всегда[1] можно указать аффинно линейную функцию $f : \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, рассмотрим полный прообраз $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеала $\mathfrak{m}$. Поскольку $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях $V(\widetilde{\mathfrak{m}}) \neq \varnothing$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_p$ для некоторой точки $p \in \mathbb{A}^n$. Поскольку $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$, точка $p \in X$. Так как $\mathfrak{m}$ максимален, включение $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_p$ влечёт равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$. □

Определение 11.1

Множество нильпотентных элементов[2] $\mathfrak{n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$ произвольного коммутативного кольца A называется *нильрадикалом* этого кольца.

Упражнение 11.1. Убедитесь, что нильрадикал является идеалом в A.

Следствие 11.1

Нильрадикал произвольной конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ совпадает с пересечением её максимальных идеалов:

$$\mathfrak{n}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A} \mathfrak{m}\,.$$

Иначе говоря, нильрадикал является ядром гомоморфизма из алгебры A в алгебру функций на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$, сопоставляющего элементу $a \in A$ функцию $\mathfrak{m} \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$.

Доказательство. Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ фактор $A/\mathfrak{m}$ является полем, поэтому класс любого нильпотента в нём равен нулю. Тем самым, нильрадикал лежит в пересечении всех максимальных идеалов. Наоборот, поскольку фактор алгебра $A_{\mathrm{red}} \stackrel{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$ приведена, она имеет вид $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ для некоторого аффинного многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и элементы алгебры A отождествляются с полиномиальными функциями на X. Если такая функция f лежит в каждом максимальном идеале, то $f(p) = 0$ для всех точек $p \in X$, т. е. $f \in I(X)$ являтся нулевым элементом алгебры $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. □

Упражнение 11.2*. Покажите, что нильрадикал произвольного коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов этого кольца.

11.2.2. Антиэквивалентность категорий. Со всяким отображением множеств $\varphi : X \to Y$ связан *гомоморфизм поднятия* $\varphi^* : \Bbbk^Y \to \Bbbk^X$, $f \mapsto f \circ \varphi$, действующий из алгебры $\Bbbk^Y$ всех функций $Y \to \Bbbk$ в алгебру $\Bbbk^X$ всех функций $X \to \Bbbk$. Если аффинные многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ имеют координатные алгебры $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ и $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y)$, а отображение $\varphi : X \to Y$ задаётся в координатах формулой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\big)$, то

[1] в том числе, над не замкнутым полем

[2] вместе с нулевым элементом

$\varphi^*(y_i) = \varphi_i$, и регулярность φ, означающая, что $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, равносильна тому, что[1] $\varphi^*(\Bbbk[Y]) \subset \Bbbk[X]$, т. е. что поднятие регулярной функции на Y является регулярной функцией на X.

Упражнение 11.3. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких или аналитических многообразий) $X \to Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру непрерывных функций $C^0(Y) \subset \mathbb{R}^Y$ (соотв. подалгебру гладких или аналитических функций на Y) в подалгебру непрерывных функций $C^0(X)$ (соотв. в подалгебру гладких или аналитических функций на X).

Теорема 11.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ контравариантный функтор

$$\mathcal{Aff}_{\Bbbk} \to \mathcal{Alg}_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}}, \quad X \mapsto \Bbbk[X] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Aff}_{\Bbbk}}(X, \mathbb{A}^1), \tag{11-3}$$

переводящий регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ аффинных многообразий в гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$, задаёт эквивалентность категорий $\mathcal{Aff}_{\Bbbk}$ и $\mathcal{Alg}_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}}$.

Доказательство. Согласно лем. 9.1 на стр. 122 достаточно убедиться, что функтор (11-3) по-существу сюрьективен и вполне строг. Первое было установлено в лем. 11.1 на стр. 148. Для доказательства второго рассмотрим функтор

$$\mathcal{Alg}_{\Bbbk} \to \mathcal{S}et, \quad A \mapsto \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Alg}_{\Bbbk}}(A, \Bbbk), \tag{11-4}$$

переводящий гомоморфизм алгебр $\psi : A \to B$ в отображение поднятия

$$\psi^* : \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} B \to \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A,$$

которое сопоставляет эпиморфизму $\mathrm{ev} : B \to \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} B$ эпиморфизм $\psi^*(\mathrm{ev}) = \mathrm{ev} \circ \psi$ с ядром $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X]$. Очевидно, что $\varphi^{**} = \varphi$ и $\psi^{**} = \psi$, т. е. отображения

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Aff}_{\Bbbk}}(X, Y) \underset{\psi^* \leftarrow\!\shortmid \psi}{\overset{\varphi \mapsto \varphi^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Alg}_{\Bbbk}}(\Bbbk[Y], \Bbbk[X])$$

являются взаимно обратными биекциями. □

Упражнение 11.4. Убедитесь в этом.

Замечание 11.1. Согласно лем. 11.2 функтор (11-4) почти квазиобратен к функтору (11-3): применяя его к координатной алгебре $A = \Bbbk[X]$, мы получаем *множество* $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ точек многообразия X. Однако на этом множестве имеется много *разных*, хотя и изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать такую структуру как вложение $\varphi : \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ с сюрьективным

[1] обратите внимание, что включение $\varphi(X) \subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$, означающее, что правило $y_i \mapsto \varphi_i$ корректно задаёт гомоморфизм фактор алгебр $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y) \to \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] = \Bbbk[X]$

гомоморфизмом поднятия $\varphi^* : \Bbbk[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow A$, отождествляющее $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ с аффинным алгебраическим многообразием $V\left(\ker\varphi^*\right) \subset \mathbb{A}^n$. Фиксация таковой структуры равносильна выбору конкретного задания алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$.

Пример 11.1 (прямая и гипербола)
Точки спектра $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам $p \in \mathbb{A}^1 = \Bbbk$: всякий гомоморфизм $\mathrm{ev} : \Bbbk[t] \to \Bbbk$ однозначно определяется своим значением $\mathrm{ev}(t) = p \in \Bbbk$ на образующей t. Соответственно, максимальные идеалы $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[t]$ суть главные идеалы вида $(t-p)$. Аналогично, точки спектра алгебры полиномов Лорана $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t, t^{-1}]$ отождествляется с дополнением до нуля $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, поскольку значение $p = \mathrm{ev}(t) = 1/(\mathrm{ev}(t^{-1})$ должно быть обратимым элементом поля $\Bbbk$. С другой стороны, алгебру полиномов Лорана можно задать образующими и соотношениями: имеется изоморфизм $\varphi^* : \Bbbk[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x, y]/(xy-1)$, $t \mapsto x$, а $t^{-1} \mapsto y$. Алгебра $\Bbbk[x, y]/(xy-1)$ это координатная алгебра гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$. Задаваемое гомоморфизмом φ отображение поднятия $\varphi : V(xy-1) \to \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$ проектирует гиперболу на координатную ось, отождествляя точки гиперболы с дополнением до нуля на этой оси.

Упражнение 11.5. Пусть аффинное алгебраическое многообразие X является теоретико-множественным объединением двух непустых замкнутых непересекающихся подмножеств: $X = Y \sqcup Z$. Покажите, что $\Bbbk[X] = \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$.

Пример 11.2 (копроизведения многообразий)
Поскольку алгебра $\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ является прямым произведением[1] в категории $\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}$ и очевидно конечно порождена и приведена, коль скоро таковыми являются $\Bbbk[X]$ и $\Bbbk[Y]$, максимальный спектр $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}\big(\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]\big) \simeq X \sqcup Y$ является копроизведением[2] X и Y в противоположной категории $\mathcal{A}ff_{\Bbbk} \simeq \mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}}$. Иными словами, дизъюнктное объединение аффинных алгебраических многообразий X и Y также является аффинным алгебраическим многообразием.

Пример 11.3 (произведения многообразий)
Тензорное произведение $\Bbbk$-алгебр $A \otimes B$ определяется как тензорное произведение векторных пространств над $\Bbbk$. Умножение разложимых тензоров задаётся правилом $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$.

Упражнение 11.6. Убедитесь, что оно корректно задаёт на $A \otimes B$ структуру коммутативной $\Bbbk$-алгебры с единицей и что эта алгебра является копроизведением алгебр A и B в категории коммутативных $\Bbbk$-алгебр с единицами.

Универсальное свойство тензорного произведения задаёт теоретико множественную биекцию $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A) \times \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$, переводящую пару гомоморфизмов вычисления $\mathrm{ev}_p : A \to \Bbbk$, $\mathrm{ev}_q : B \to \Bbbk$ в гомоморфизм $A \otimes B \to \Bbbk$, $a \otimes b \mapsto a(p)b(q)$. Если алгебры A и B конечно порождены, их тензорное произведение порождается всевозможными тензорными произведениями образующих алгебр A и B. Если алгебры A и B приведены, то $A \otimes B$ тоже приведена, поскольку всякий элемент $h \in A \otimes B$, задающий

[1] в смысле прим. 9.13 на стр. 125
[2] в смысле прим. 9.14 на стр. 125

нулевую функцию на $\mathrm{Spec}_\mathrm{m}(A \otimes B)$, равен нулю. Чтобы в этом убедиться, запишем h в виде $\sum f_\nu \otimes g_\nu$ с линейно независимыми над $\Bbbk$ элементами $g_\nu \in B$. Из равенства $(\mathrm{ev}_p \otimes \mathrm{ev}_q)h = 0$, справедливого для всех $(p,q) \in \mathrm{Spec}_\mathrm{m}(A \otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p \in \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$ является тождественно нулевой функцией на $\mathrm{Spec}_\mathrm{m} B$, и потому равна нулю, т. к. алгебра B приведена. Поэтому все $f_\nu(p) = 0$ для всех p, т. е. $f_\nu \in A$ задают нулевые функции на $\mathrm{Spec}_\mathrm{m} A$. Поскольку A приведена, $f_\nu = 0$, а значит, и $h = 0$. Таким образом, $\Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y]$ является копроизведением в $\mathcal{A}\ell g_\Bbbk$. Поэтому аффинное многообразие $\mathrm{Spec}_\mathrm{m}\big(\Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y]\big)$ является произведением $X\times Y$ в категории $\mathcal{A}f\!f_\Bbbk$. Выше мы видели, что как множество оно совпадает с прямым произведением в $\mathcal{S}et$.

11.3. Топология Зарисского. На множестве $X = \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A$ имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры A. Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в X, т. е. множества вида

$$V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I\ \} = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_\mathrm{m} A \mid I \subset \mathfrak{m}\}\,,$$

для всевозможных идеалов $I \subset A$.

Упражнение 11.7. Убедитесь, что а) $\varnothing = V(1)$ б) $X = V(0)$ в) $\bigcap\limits_\nu V(I_\nu) = V\Big(\sum\limits_\nu I_\nu\Big)$, где идеал $\sum\limits_\nu I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum\limits_\nu f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$ г) $V(I)\cup V(J) = V(I\cap J) = V(IJ)$, где[1] идеал IJ является $\Bbbk$-линейной оболочкой всевозможных произведений ab с $a \in I$, $b \in J$.

Топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости», и многие её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии. Скажем, топология Зарисского на $X \times Y$ тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y, поскольку замкнутые $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в X, Y: например, если $X = Y = \mathbb{A}^1$, то любая кривая, скажем, гипербола $V(xy-1)$, замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, в то время как произведения замкнутых множеств на $\mathbb{A}^1$ исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и координатных прямых.

Предложение 11.1 (база открытых множеств и компактность)
Каждое открытое подмножество аффинного алгебраического многообразия X является объединением конечного числа *главных открытых множеств*

$$\mathcal{D}(f) \overset{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}\,, \quad \text{где} \quad f \in \Bbbk[X]\,,$$

и *компактно*[2].

Доказательство. Пусть $U = X \smallsetminus V(I)$. Так как каждый идеал в $\Bbbk[X]$ конечно порождён, $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, а значит, $V(I) = \bigcap V(f_i)$, и $U = \bigcup\big(X \smallsetminus V(f_i)\big) = \bigcup\limits_\nu \mathcal{D}(f_i)$. Условие,

[1] обратите внимание, что последнее равенство равносильно равенству $\sqrt{I\cap J} = \sqrt{IJ}$

[2] в том смысле, что в каждом его открытом покрытии содержится конечное подпокрытие

что U покрыто семейством множеств $\mathcal{D}(f_\nu)$, означает, что $X \setminus U \supset V(I)$, где I — идеал, порождённый функциями f_ν. Поскольку из них можно выбрать конечный набор, порождающий тот же идеал, любое покрытие главными открытыми множествами содержит конечное подпокрытие. □

Предложение 11.2 (непрерывность регулярных морфизмов)
Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}\big(V(I)\big)$ замкнутого подмножества $V(I) \subset Y$ состоит из всех таких точек $x \in X$, что $f(\varphi(x)) = 0$ для всех $f \in I$. Тем самым, он является множеством нулей идеала, порождённого в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. □

11.3.1. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X, представимое в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ своих собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В обычной метрической топологии практически все пространства приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия X равносильна наличию делителей нуля в алгебре $\Bbbk[X]$, и неприводимые многообразия являются грубыми аналогами степеней простых чисел в арифметике.

Предложение 11.3
Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда в его координатной алгебре $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля.

Доказательство. Разложение $X = X_1 \cup X_2$, в котором каждое X_i замкнуто, непусто и отлично от X, означает наличие ненулевых необратимых $f_1 \in I(X_1)$ и $f_2 \in I(X_2)$. Произведение $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X, и значит, равно нулю $\Bbbk[X]$. Наоборот, если $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$, а оба f_i ненулевые, то они необратимы в $\Bbbk[X]$, и значит, оба замкнутых подмножества $V(f_1)$ и $V(f_2)$ непусты и отличны от X. При этом $X = V(f_1) \cup V(f_2)$. □

Упражнение 11.8. Убедитесь, что $V(f)$ непусто и отлично от X для всякого ненулевого необратимого многочлена $f \in \Bbbk[X]$.

Следствие 11.2
Аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Теорема 11.3
Каждое аффинное алгебраическое многообразие имеет единственное разложение в конечное объединение $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$ неприводимых замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, таких что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. Разложение строится индуктивно: если X приводимо, мы в качестве первого шага представим его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ — собственные замкнутые подмножества. Если после нескольких шагов мы получим разложение $X = \bigcup Z_\nu$ в котором все Z_ν неприводимы, процесс заканчивается, и, выкидывая неприводимые компоненты, содержащиеся в других неприводимых компонентах, мы получим требуемое разложение. В противном случае мы делаем следующий шаг, заменяя приводимые Z_ν объединениями их собственных замкнутых подмножеств. Если эта процедура не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots$, идеалы которых составят бесконечную строго возрастающую цепочку $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$, что противоречит нётеровости $\Bbbk[X]$.

Докажем единственность индукцией по наименьшему числу неприводимых компонент. Пусть X раскладывается на k компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение единственно. Если неприводимое замкнутое подмножество $Y \subset X$ лежит в объединении замкнутых подмножеств $Z_1 \cup Z_2$, то $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$, а значит, $Y \subset Z_1$ или $Y \subset Z_2$. Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$ влечёт включение $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β, откуда $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$. Выкинем из разложений X_1 и Y_α и применим предположение индукции к замыканиям оставшихся компонент. □

Упражнение 11.9. Пусть $Z \subsetneq Y \subset X$ замкнуты и Y неприводимо. Убедитесь, что $Y = \overline{Y \smallsetminus Z}$ (замыкание берётся в X) и что неприводимость Y для этого существенна.

Определение 11.2
Неприводимые замкнутые подмножества $X_i \subset X$, о которых идёт речь в теор. 11.3, называются *неприводимыми компонентами* многообразия X.

Следствие 11.3
Элемент $f \in \Bbbk[X]$ делит нуль , если и только если он обращается в нуль на неприводимой компоненте многообразия X, но не на всём X.

Пример 11.4 («большие» открытые множества)
Топология Зарисского нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, иначе возникло бы разложение $X = (X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)$. Иначе говоря, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём.

Упражнение 11.10. Пусть X неприводимо и $f, g \in \Bbbk[X]$. Докажите, что если $f|_U = g|_U$ для некоторого непустого открытого $U \subset X$, то $f = g$ в $\Bbbk[X]$.

11.4. Рациональные функции. Элементы из $\Bbbk[X]$, не являющиеся делителями нуля, образуют *мультипликативную систему*[1] $S_X \subset \Bbbk[X]$. Кольцо частных[2] $\Bbbk[X]S_X^{-1}$ называется *кольцом рациональных функций* на X и обозначается $\Bbbk(X)$. Если X неприводимо, то $\Bbbk(X) = Q_{\Bbbk[X]}$ — это поле частных целостного кольца $\Bbbk[X]$.

[1]напомним, что подмножество S в коммутативном кольце A с единицей называется *мультипликативной системой*, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$

[2]напомним, что кольцом частных AS^{-1} со знаменателями из мультипликативной системы S коммутативного кольца A с единицей (или *локализацией* A относительно S) называется фактор декартова произведения $A \times S$, элементы которого принято обозначать a/s и называть *дробями*, по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему равенства $a/s = (at)/(st)$ со всевозможными $a \in A$ и $s, t \in S$ (если Вы впервые с этим сталкиваетесь, то Вам следует убедиться, что $a_1/s_1 = a_2/s_2$ тогда и только тогда, когда $t(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ для некоторого $t \in S$, и

Говорят, что рациональная функция $f \in \Bbbk(X)$ *определена* в точке $x \in X$, если существует такое её представление дробью $f = p/q$, в котором $p, q \in \Bbbk[X]$, q не делит нуль, и $q(x) \neq 0$. Число $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ называется *значением* f в точке x.

Упражнение 11.11. Убедитесь, что $f(x)$ не зависит от способа записи f в виде $f = p/q$ с $p, q \in \Bbbk[X]$, q не делящим нуль, и $q(x) \neq 0$.

Множество точек x, в которых определена рациональная функция f, называется *областью определения* функции f и обозначается $\mathrm{Dom}(f)$. Из сл. 11.3 и прим. 11.4 вытекает, что $\mathrm{Dom}(f)$ является плотным открытым подмножеством в X.

Упражнение 11.12. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца $\Bbbk(X)$ достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в X.

Для открытого $U \subset X$ положим $\Bbbk[U] \overset{\text{def}}{=} \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) \supset U\}$ и будем называть его кольцом *рациональных функций, регулярных в* U.

Предложение 11.4
Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуля, то $\Bbbk\big[\mathcal{D}(h)\big] = \Bbbk[X][h^{-1}]$ является кольцом частных $\Bbbk[X]$ со знаменателями из мультипликативной системы $\{h^k\}_{k\geqslant 0}$.

Доказательство. Для рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$ положим

$$\left(f^{-1}\right) \overset{\text{def}}{=} \{g \in \Bbbk[X] \mid gf \in \Bbbk[X]\}\,. \tag{11-5}$$

Это идеал в $\Bbbk[X]$, и лежащие в нём неделители нуля суть все возможные знаменатели, встречающиеся в разнообразных представлениях f в виде дроби. Делители нуля в $\left(f^{-1}\right)$ суть пересечения этого идеала с идеалами $I(X_i)$ неприводимых компонент X_i многообразия X. Так как неделители нуля в $\left(f^{-1}\right)$ по определению имеются, каждое из пересечений $\left(f^{-1}\right) \cap I(X_i) \subsetneq \left(f^{-1}\right)$ является собственным векторным подпространством в $\left(f^{-1}\right)$, и весь идеал $\left(f^{-1}\right)$ является объединением этих подпространств и подпространства, порождённого неделителями нуля. Если последнее подпространство тоже собственное, пространство $\left(f^{-1}\right)$ оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем[1].

Упражнение 11.13. Убедитесь в этом.

Таким образом, неделители нуля линейно порождают $\left(f^{-1}\right)$ как векторное пространство над $\Bbbk$, и $X \smallsetminus \mathrm{Dom}(f) = V\Big(\left(f^{-1}\right)\Big)$. Включение $\mathcal{D}(h) \subset \mathrm{Dom}(f)$ равносильно включению $V(h) \supset V\Big(\left(f^{-1}\right)\Big)$, т. е. занулению функции h на общих нулях всех знаменателей функции f. По теореме Гильберта о нулях $h^d \in \left(f^{-1}\right)$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тем самым, $f = p/h^d$, где $p = h^d \cdot f \in \Bbbk[X]$. □

что обычные правила сложения и умножения дробей задают на AS^{-1} структуру коммутативного кольца)

[1] а алгебраически замкнутое поле бесконечно

11.4.1. Аффинность главных открытых множеств. Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то главное открытое подмножество $\mathcal{D}(h) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][h^{-1}] = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][t]/(1-ht)$ всюду плотно в X и является аффинным алгебраическим многообразием: например, его можно реализовать замкнутой гиперповерхностью $V(1-ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$. Вложение $i : \mathcal{D} \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом аффинных многообразий: его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение $i^* : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][h^{-1}] \simeq \Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ и продолжается до изоморфизма колец частных $i^* : \Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk\big(\mathcal{D}(h)\big)$.

Замечание 11.2. Два *разных* толкования записи $\Bbbk\big[\mathcal{D}(h)\big]$ — как координатной алгебры абстрактного аффинного многообразия, коим является $\mathcal{D}(h)$, и как подкольца в $\Bbbk(X)$, состоящего из рациональных функций, определённых всюду в $\mathcal{D}(h) \subset X$, при этом *согласованы* друг с другом. В частности, согласованы друг с другом и два толкования обозначения $\Bbbk[X]$ — как координатной алгебры самого многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и как алгебры всюду регулярных рациональных функций:

$$\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) = \Bbbk[X] = \{f \in \Bbbk(X) \mid \operatorname{Dom}(f) = X\}$$

что вытекает из предл. 11.4 при $h = 1$ и отвечает несобственному $\mathcal{D}(h) = X$.

Предостережение 11.1. Неглавное открытое подмножество $U \subset X$, вообще говоря, *не является* аффинным подмногообразием: каноническое вложение $U \hookrightarrow \operatorname{Spec_m} \Bbbk[U]$, сопоставляющее точке $u \in U$ её максимальный идеал $\mathfrak{m}_u = \ker \operatorname{ev}_u \subset \Bbbk[U]$, может быть не биективно.

Упражнение 11.14. Пусть $n \geqslant 2$ и $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что $\Bbbk[U] = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ и, тем самым, $\operatorname{Spec_m} \Bbbk[U] = \mathbb{A}^n \neq U$.

Предложение 11.5

Пусть $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ — разложение аффинного алгебраического многообразия X на неприводимые компоненты. Тогда $\Bbbk(X) = \Bbbk(X_1) \times \Bbbk(X_2) \times \dots \times \Bbbk(X_k)$.

Доказательство. Выберем в идеале $I = I\Big(\bigcup\limits_{i \neq j}(X_i \cap X_j)\Big) \subset \Bbbk[X]$ функций, зануляющихся на всех попарных пересечениях различных неприводимых компонент многообразия X, какую-нибудь ненулевую функцию $f \in I$, не делящую нуль в $\Bbbk[X]$.

Упражнение 11.15. Убедитесь, что I линейно порождается такими функциями над $\Bbbk$.

Главное открытое подмножество $W = \mathcal{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}] \subset X$ аффинно и является дизъюнктным объединением подмножеств $W_i = W \cap X_i \subset X_i$. Каждое W_i является главным открытым подмножеством многообразия X_i и тоже аффинно:

$$W_i = \mathcal{D}(f_i) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i\,, \quad \text{где} \quad f_i = f \pmod{I(X_i)} \in \Bbbk[X_i]\,.$$

Согласно упр. 11.5 $\Bbbk[W] \simeq \Bbbk[W_1] \times \Bbbk[W_2] \times \dots \times \Bbbk[W_k]$.

Упражнение 11.16. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей: $(K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k)S^{-1}_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k} \simeq K_1 S^{-1}_{K_1} \times K_2 S^{-1}_{K_2} \times \dots \times K_k S^{-1}_{K_k}$.

Таким образом, $\Bbbk(X) \simeq \Bbbk(W) \simeq \prod \Bbbk(W_i) \simeq \prod \Bbbk(X_i)$. □

11.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi_1^*} \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \mathrm{im}(\varphi^*) \xhookrightarrow{\varphi_2^*} \Bbbk[X]\,. \tag{11-6}$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра

$$\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \mathrm{im}(\varphi^*) \subset \Bbbk[X]$$

тоже является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, отвечающей аффинному многообразию $Z = \mathrm{Spec_m}\left(\mathrm{im}(\varphi^*)\right) \simeq V\left(\ker(\varphi^*)\right) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма $\varphi_1^* : \Bbbk[Z] \to \Bbbk[X]$ означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е.*плотность* $\varphi_1(X)$ в Z. Тем самым, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$ есть замыкание образа $\varphi(X)$ в многообразии Y, вложенное в Y как множество $V(\ker\varphi^*)$ нулей идеала $\ker\varphi^*$. Иными словами, алгебраическое разложение (11-6) геометрически означает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \to Y$ в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xhookrightarrow{\varphi_2} Y$$

регулярного морфизма $X \to Z$ с плотным образом и регулярного вложения Z в Y в качестве замкнутого подмногообразия.

11.5.1. Замкнутые вложения. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to k[X]$ сюрьективен. Это означает, что φ является изоморфизмом между X и замкнутым подмногообразием

$$V(\ker\varphi^*) \subset Y\,.$$

Если замкнутое подмножество $Z \subset X$ неприводимо, гомоморфизм подъёма $i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[Z]$, отвечающий замкнутому вложению $i : Z \hookrightarrow X$, принимает значения в целостном кольце $\Bbbk[Z]$, которое канонически вложено в своё поле частных $\Bbbk(Z)$. По универсальному свойству кольца частных $\Bbbk(X)$ эпиморфизм i^* однозначно продолжается до эпиморфизма

$$\mathrm{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)\,, \tag{11-7}$$

который ограничивает рациональные функции с X на Z и может интуитивно восприниматься как гомоморфизм вычисления рациональных функций на X в «в общей точке» неприводимого подмногообразия $Z \subset X$, где вычисляемая функция всегда определена, а результат такого вычисления лежит в поле $\Bbbk(Z)$.

В частности, когда $Z \subset X$ является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия X, из сюрьективности гомоморфизма (11-7) вытекает, что всякая рациональная функция на Z является ограничением некоторой рациональной функции на X, т. е. записывается дробью вида p/q, знаменатель которой

$$q\ (\mathrm{mod}\ I(X_i)) \in \Bbbk[X_i] = \Bbbk[X]/I(X_i)$$

представляется элементом $q \in \Bbbk[X]$, не делящим нуль в $\Bbbk[X]$.

Упражнение 11.17. Укажите такого представителя для функции $1/x \in \Bbbk\left(\mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x]\right)$ на прямой $Z = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x] = V(y)$ координатного креста $X = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x,y]/(xy)$ на плоскости $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x,y]$.

11.5.2. Доминантные морфизмы. Если X неприводимо и гомоморфизм алгебр

$$\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$$

инъективен, то соответствующий морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *доминантным*. Как мы видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Если X приводимо, то морфизм φ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на *каждую* неприводимую компоненту многообразия X. В этом случае ограничение $\varphi_i = \varphi|_{X_i}$ морфизма φ каждую неприводимую компоненту $X_i \subset X$ задаёт вложение $\varphi_i^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X_i] \subset \Bbbk(X_i)$ в *поле* рациональных функций на X_i. По универсальному свойству кольца частных это вложение однозначно продолжается до вложения в то же поле кольца рациональных функций: $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \Bbbk(X_i)$. Таким образом, каждый доминантный морфизм $X \to Y$ задаёт вложение

$$\Bbbk(Y) \hookrightarrow \prod \Bbbk(X_i) = \Bbbk(X)\,.$$

Упражнение 11.18. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ раскладывается в композицию

$$X \overset{\psi}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{A}^m \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Y\ , \tag{11-8}$$

где ψ — замкнутое вложение, а π — естественная проекция вдоль $\mathbb{A}^m$.

11.5.3. Конечные морфизмы. Наличие регулярного морфизма $\varphi : X \to Y$ позволяет рассматривать $\Bbbk[X]$ как алгебру над $\varphi^*(\Bbbk[Y]) = \Bbbk[\overline{\varphi(X)}] \subset \Bbbk[X]$. Морфизм φ называется *конечным*, если алгебра $\Bbbk[X]$ является целой над своей подалгеброй $\varphi^*(k[Y])$ или, что то же самое, если $\Bbbk[X]$ является конечно порождённым $\varphi^*(k[Y])$-модулем[1].

Лемма 11.3
Любой конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ аффинных алгебраических многообразий переводит всякое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, и индуцированный морфизм $\varphi|_Z : Z \to \varphi(Z)$ тоже конечен. Кроме того, если X неприводимо, то $\varphi(Z) \neq Y$ ни для какого замкнутого $Z \neq X$.

Доказательство. Пусть $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$ — идеал замкнутого подмножества $Z \subset X$. Ограничение $\varphi|_Z : Z \to Y$ отвечает сквозному гомоморфизму алгебр

$$\varphi_Z^* : k[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X] \to \Bbbk[X]/I\,.$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как $\varphi^*(k[Y])$-модуль, алгебра $\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]/I$ также конечно порождена как модуль над $\Bbbk[\,\overline{\varphi(Z)}\,] = \varphi|_Z^*(k[Y]) = \varphi^*(k[Y])\,/\,(I \cap \varphi^*(k[Y]))$. Тем самым, $Z \to \overline{\varphi(Z)}$ — конечный морфизм.

Равенство $\varphi(Z) = \overline{\varphi(Z)}$ достаточно доказывать отдельно для каждой неприводимой компоненты Z, причём ввиду предыдущего можно заменить X на Z, а Y на $\overline{Z}$.

[1] т. е. $\exists\, f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$, такие что любой $h \in \Bbbk[X]$ записывается как $h = \sum \varphi^*(g_i)\, f_i$ с подходящими $g_i \in \Bbbk[Y]$

Итак, достаточно показать, что всякий конечный доминантный морфизм $\varphi : Z \to Y$ неприводимого аффинного многообразия Z сюрьективен. На алгебраическом языке это означает, что для любого расширения алгебр $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[Z]$, такого что $\Bbbk[Z]$ не имеет делителей нуля и является конечно порождённым $\Bbbk[Y]$ модулем, всякий максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ для некоторого собственного максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[Z]$.

Если идеал $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z]$, порождённый $\mathfrak{m}$ в $\Bbbk[Z]$, является собственным в $\Bbbk[Z]$, то в качестве $\widetilde{\mathfrak{m}}$ можно взять любой максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z]$. Таким образом, мы должны показать, что $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z] \neq \Bbbk[Z]$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$.

Предположим противное: что $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z] = \Bbbk[Z]$ для какого-то собственного идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$. Пусть функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ порождают $\Bbbk[Z]$ как $\Bbbk[Y]$-модуль. Наше предположение означает, что каждую из них можно записать как $f_i = \sum\limits_{\nu} f_\nu \beta_{\nu i}$ с $\beta_{\nu i} \in \mathfrak{m}$, или, в матричных обозначениях: $(f_1, f_2, \dots, f_m) \cdot (E - B) = 0$, где $B = \left(\beta_{\nu i}\right) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathfrak{m})$, а E — единичная матрица. Тем самым, *нулевой* эндоморфизм $\Bbbk[Y]$-модуля $\Bbbk[Z]$ представляется в образующих $\{f_\nu\}$ умножением на матрицу $E - B$. Поэтому умножение на $\det(E - B)$ тоже аннулирует[1] модуль $\Bbbk[Z]$. Так как в $\Bbbk[Z]$ нет делителей нуля, $\det(E - B) = 0$. Раскрывая этот определитель, заключаем, что $1 \in \mathfrak{m}$, т. е. $\mathfrak{m} = \Bbbk[Y]$ не является собственным.

Для доказательства неравенства $\varphi(Z) \neq Y$ при $Z \subsetneq X$ рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию $f \in \Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся вдоль Z, и запишем для неё целое уравнение над $\varphi^*(k[Y])$ минимальной возможной степени:

$$f^m + \varphi^*(g_1) f^{m-1} + \dots + \varphi^*(g_{m-1}) f + \varphi^*(g_m) = 0\,.$$

Вычисляя его левую часть в точках $z \in Z$, получим $\varphi^*(g_m)|_Z = g_m|_{\varphi(Z)} \equiv 0$, но при этом $g_m \neq 0$ в $\Bbbk[Y]$, т. к. иначе мы могли бы сократить уравнение на f (ибо в $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля). Таким образом, $\varphi(Z) \subset V(g_m) \subsetneq Y$. □

11.5.4. Нормальные многообразия. Аффинное алгебраическое многообразие Y называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра $\Bbbk[Y]$ целозамкнута в поле рациональных функций $\Bbbk(Y) = Q_{\Bbbk[Y]}$, т. е. является *нормальным кольцом* в смысле опр. 10.3. Например, любое аффинное многообразие с факториальной координатной алгеброй нормально. В частности, все аффинные пространства $\mathbb{A}^n$ нормальны[2].

Лемма 11.4

Всякий сюрьективный конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ в нормальное многообразие Y открыт[3] и сюрьективно отображает каждую неприводимую компоненту X на Y.

Доказательство. Отождествим $\Bbbk[Y]$ с подалгеброй в $\Bbbk[X]$ при помощи φ^*. Открытость φ означает, что образ любого главного открытого множества $\mathcal{D}(f) \subset X$ содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки, т. е. для любой функции

[1] в силу равенства $\det(E-B)\cdot E = (E-B)\cdot(E-B)^\vee$, где $(E-B)^\vee$ — присоединённая к $(E-B)$ матрица (транспонированная к матрице алгебраических дополнений)

[2] включая точку $\mathbb{A}^0 = \mathrm{Spec_m}\, \Bbbk$

[3] т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U \subset X$

$f \in \Bbbk[X]$ и любой точки $p \in X$, где $f(p) \neq 0$, мы должны указать такую функцию $a \in \Bbbk[Y]$, что на Y

$$\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$$

Для этого рассмотрим отображение $\psi = \varphi \times f : X \to Y \times \mathbb{A}^1$, $p \mapsto \big(\varphi(p), f(p)\big)$. Его гомоморфизм поднятия $\psi^* : \Bbbk[Y \times \mathbb{A}^1] = \Bbbk[Y][t] \to k[X]$ есть вычисление полиномов от t с коэффициентами в $\Bbbk[Y]$ на элементе $f \in \Bbbk[X]$. По сл. 10.3 минимальный многочлен μ_f элемента f над полем $\Bbbk(Y)$ лежит в $\Bbbk[Y]$. Тем самым, ψ^* это факторизация по главному идеалу $(\mu_f) = \ker \psi^*$. Поэтому ψ конечен и сюрьективно отображает X на гиперповерхность, заданную в $Y \times \mathbb{A}^1$ уравнением $\mu_f(y;t) = t^m + a_1(y)\,t^{m-1} + \dots + a_m(y) = 0$. В слое $\{\varphi(p)\} \times \mathbb{A}^1 \subset Y \times \mathbb{A}^1$ над точкой $\varphi(p) \in Y$ многочлен $\mu_f(\varphi(p);t) \in \Bbbk[t]$ имеет ненулевой корень $t = f(p)$. Стало быть, хоть один из его коэффициентов, скажем a_i, отличен от нуля в точке $\varphi(p)$. Над всеми точками $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$ коэффициент $a_i(q)$ также отличен от нуля, а значит, у многочлена $\mu_f(q;t) \in \Bbbk[t]$ также есть ненулевой корень. Следовательно, все эти точки q тоже лежат в образе множества $\mathcal{D}(f)$, т. е. $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$, как и требовалось.

Что касается ограничения φ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$, то для каждого i множество $U_i = X \smallsetminus \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu = X_i \smallsetminus \bigcup\limits_{\nu \neq i} (X_i \cap X_\nu)$ открыто в X и плотно в X_i. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y, откуда $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. □

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 11.1. Если $a^n = 0$ и $b^m = 0$, то $(a+b)^{m+n-1} = 0$ и $(ca)^n = 0$ для всех c.

Упр. 11.4. Пусть аффинные многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ имеют координатные алгебры $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ и $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y)$. Если регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ задаётся формулой $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\big)$, где $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_,]n$, то $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ действует на образующие алгебры $\Bbbk[Y]$ по правилу $y_i \mapsto \varphi_i \pmod{I}(X)$, причём включение $\varphi(X) \subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$, означающее, что это правило корректно задаёт отображение из фактор алгебры $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y)$. Дважды двойственное отображение $\varphi^{**} : \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X] \to \operatorname{Spec_m} \Bbbk[Y]$ переводит гомоморфизм вычисления $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f(x) \mapsto f(p)$, в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in X$, в его композицию с φ^*. Эта композиция переводит образующую $y_i \in \Bbbk[Y]$ в число $\varphi_i(p)$, т. е. является гомоморфизмом вычисления в точке $\varphi(p)$. Тем самым $\varphi^{**} = \varphi$. Аналогично проверяется, что и наоборот, если задан гомоморфизм алгебр $\psi : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$, то $\psi^{**} = \psi$.

Упр. 11.5. Это геометрическая версия китайской теоремы об остатках. Отображение $\varphi : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$, переводящее $f \in \Bbbk[X]$ в пару $(f|_Y, f|_Z)$, инъективно, т. к. $Y \cup Z = X$. По теореме Гильберта нулях идеал $I(Y) + I(Z) \subset \Bbbk[X]$, задающий в X пересечение $Y \cap Z = \varnothing$, содержит единицу, т. е. существуют такие $s \in I(Y)$ и $t \in I(Z)$, что $1 = s + t$. Тогда $\varphi(s) = \varphi(1-t) = (0,1)$ и $\varphi(t) = \varphi(1-s) = (1,0)$, а произвольная пара классов $(f \pmod{I(Y)}, g \pmod{I(Z)}) \in \Bbbk[Y] \times \Bbbk[Z]$ равна $\varphi(ft + gs)$, что означает сюрьективность φ.

Упр. 11.6. Поскольку формула для произведения разложимых тензоров билинейна, она корректно распространяется по линейности на неразложимын тензоры. Универсальные отображения $A \xrightarrow{\alpha} A \otimes B \xleftarrow{\beta} B$ действуют по правилам $\alpha(a) = a \otimes 1$ и $\beta(b) = 1 \otimes b$. Их универсальные свойства вытекают из универсальных свойств тензорного произведения: если заданы гомоморфизмы алгебр с единицами $\varphi : A \to C$ и $\psi : B \to C$, то отображение $A \times B \to C$, $(a,b) \mapsto \varphi(a) \cdot \psi(b)$, билинейно, а значит, однозначно пропускается через тензорное произведение $A \otimes B$.

Упр. 11.7. Первые три равенства и включения $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$ очевидны.

Упр. 11.8. Если $V(f) = X$, то $f \in I(X)$, и значит, $f = 0$ в $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. Если $V(f) = \varnothing$, то множество нулей идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённого идеалом $I(X)$ и многочленом f пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что $1 \equiv sf \pmod{I(X)}$ для некоторого $s \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. f обратим в $\Bbbk[X]$.

Упр. 11.10. Иначе $X = (X \smallsetminus U) \cup V(f - g)$.

Упр. 11.14. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$ и предл. 11.4.

Упр. 11.15. Каждое пересечение $I \cap I(X_i)$ является собственным векторным подпространством в I, поскольку включение $I \subset I(X_\nu)$ означало бы, что $X_\nu \subset \bigcup\limits_{i \neq j} (X_i \cap X_j)$, а это в силу непроводимости X_ν влечёт включение $X_\nu \subset X_i \cap X_j$ для некоторых $i \neq j$, что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все неделители нуля в I лежат в собственном подпространстве, то I оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. 11.16. Элемент прямого произведения не делит нуль тогда и только тогда, когда каждая из его компонент не делит нуль: $S^{-1}_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k} = S^{-1}_{K_1} \times S^{-1}_{K_2} \times \dots \times S^{-1}_{K_k}$.

Упр. 11.18. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $\varphi^* : B \hookrightarrow A$ задаёт на A структуру конечно порождённой B-алгебры, т. е. представляет A в виде $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$, что и утверждается.