# Симметрические функции

**А3◇1.** Сумма двух из комплексных корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ равна 1. Найдите $\lambda$.

**А3◇2.** Найдите все комплексные решения системы уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\,, \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24\,.$$

**А3◇3.** Выразите через элементарные симметрические многочлены $e_i$ функции:

**а)** $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ **б)** $\sum\limits_{i\neq j\neq k\neq i} x_i(x_j + x_k)$ **в)** $\sum\limits_{i\neq j} x_i^2 x_j$

**г)** $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)$

**А3◇4.** Выразите дискриминант[1] $D_f$ кубического трёхчлена $f = x^3 + px + q$ через $p$ и $q$.

**А3◇5.** Пусть в зад. А3◇4 $p, q \in \mathbb{R}$. Покажите, что при $D_f < 0$ у $f$ есть ровно один вещественный корень, а при $D_f > 0$ — ровно три, и в этом случае уравнение $f = 0$ перескалированием переменной приводится к виду $4t^3 - 3t = a$ и решается в тригонометрических функциях.

**А3◇6.** Найдите все $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых многочлен $x^4 - 4x + \lambda$ имеет кратный корень.

**А3◇7 (циркулянт).** Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, через значения полинома $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$ на комплексных корнях $n$-той степени из единицы.

**А3◇8.** Вычислите дискриминант $n$-того кругового многочлена[2] $\Phi_n(x)$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для всех $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

**А3◇9.** Многочлен $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ имеет корни $x_1, x_2, \dots, x_n$. Всякий ли симметрический многочлен от $x_2, \dots, x_n$ переписывается в виде многочлена от $x_1$?

**А3◇10.** Обозначим через $\zeta \in \mathbb{C}$ какой-нибудь первообразный корень $m$-той степени из единицы.

**а)** Для каждого $a \in \mathbb{C}$ раскройте скобки и приведите подобные в $\prod\limits_{\nu=1}^{m}(a - \zeta^{\nu-1}x)$.

**б)** Покажите, что $\forall\, f \in \mathbb{C}[x]\ \exists\, h \in \mathbb{C}[x]$: $\prod\limits_{\nu=1}^{m} f(\zeta^{\nu-1}x) = h(x^m)$.

**в)** Выразите корни многочлена $h$ через корни многочлена $f$.

**А3◇11.** Найдите в $\mathbb{C}[x]$ многочлен 4-й степени, корнями которого являются

**а)** квадраты всех комплексных корней многочлена $x^4 + 2x^3 - x + 3$

**б)** кубы всех комплексных корней многочлена $x^4 - x - 1$.

**А3◇12.** Выразите **а)** $s_{(1^n)}$ через $e_\nu$ **б)** $s_{(n)}$ через $h_\nu$.

**А3◇13.** Представьте **а)** $s_{(1)}^2$ **б)** $s_{(1,1)} \cdot s_{(2)}$ в виде целочисленных линейных комбинаций многочленов $s_\lambda$.

**А3◇14*.** Докажите, что $e^{F\otimes E + E\otimes F} = e^F \otimes e^F$ в $\mathrm{Mat}_{n^2}(\mathbb{C})$, где $F$ — любая, а $E$ — единичная комплексные матрицы размера $n \times n$.

**А3◇15*.** Покажите, что в кольце формальных степенных рядов с рациональными коэффициентами от матричных элементов $n \times n$ матрицы $A$ выполняется равенство $\ln\det(E - A) = \operatorname{tr}\ln(E - A)$, а для всех достаточно малых комплексных матриц $A$ оно выполняется и численно.

---

[1] *дискриминантом* приведённого многочлена $f(x) = \prod(x - x_i)$ степени $n$ называется произведение $\binom{n}{2}$ квадратов разностей его корней $D_f = \Delta_\delta^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)^2$, выраженное через коэффициенты многочлена $f$

[2] *$n$-тым круговым многочленом* называется приведённый многочлен степени $\varphi(n)$, корнями которого являются все примитивные комплексные корни степени $n$ из единицы

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

**Листок № 3 (2 октября 2014)**

| № | дата сдачи | имя и фамилия принявшего | подпись принявшего |
|---|---|---|---|
| **1** | | | |
| **2** | | | |
| **3а** | | | |
| **б** | | | |
| **в** | | | |
| **г** | | | |
| **4** | | | |
| **5** | | | |
| **6** | | | |
| **7** | | | |
| **8** | | | |
| **9** | | | |
| **10а** | | | |
| **б** | | | |
| **в** | | | |
| **11а** | | | |
| **б** | | | |
| **12а** | | | |
| **б** | | | |
| **13а** | | | |
| **б** | | | |
| **14** | | | |
| **15** | | | |