$\mathfrak{sl}_2$-модули.

A5½◇1. Напишите коммутационные соотношения на матрицы Паули[1]

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A5½◇2. Покажите, что в любом конечномерном представлении $\mathfrak{sl}_2$ операторы X и Y нильпотентны, а H диагонализуем.

A5½◇3. Покажите, что действие на произведения по правилу Лейбница[2] корректно наделяет тензорные произведения, а также симметрические и внешние степени $\mathfrak{sl}_2$-модулей структурой $\mathfrak{sl}_2$-модулей.

A5½◇4. Покажите, что представление V_n^*, двойственное[3] к V_n, изоморфно V_n.

A5½◇5. Присоединённое представление $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ сопоставляет матрице $a \in \mathfrak{sl}_2$ оператор $\mathrm{ad}_a : y \mapsto [a, y]$. Покажите, что $\mathrm{ad}_{[a,b]} = [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]$ для любых $a, b \in \mathfrak{sl}_2$.

A5½◇6 (оператор Казимира). Вычислите матрицу Грама билинейной формы[4] $(a, b) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_b)$ на $\mathfrak{sl}_2$ в базисе Шевалле X, Y, H и в базисе Паули из зад. A5½◇1, выразите двойственные им базисы X^*, Y^*, H^* и $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$, а также тензор $\varkappa \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2} \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) = \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2$ через X, Y, H и через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Верно ли, что **а)** $([a, b], c) + (b, [a, c]) = 0 \ \forall \ a, b, c \in \mathfrak{sl}_2$ **б)** в любом линейном представлении *оператор Казимира*, получающийся из $\varkappa$ заменой $\otimes$ на композицию, коммутирует со всеми операторами из $\mathfrak{sl}_2$? **в)** Опишите действие оператора Казимира на всех неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулях.

A5½◇7 (Разложение Клебша – Гордана). Разложите $V_m \otimes V_n$ в прямую сумму стандартных и выясните, при каких m, n это разложение содержит **а)** V_0 **б)** V_1.

A5½◇8. Существует ли на V_n $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное скалярное произведение[5]? Если да, то насколько оно единственно? Можно ли выбрать его симметричным и/или кососимметричным?

A5½◇9. При каких условиях на натуральные числа m, n, k имеется $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный оператор $\varepsilon^k_{mn} : V_m \otimes V_n \to V_k$? Много ли таких операторов, когда они есть?

A5½◇10. Разложите в сумму стандартных естественное представление[6] $\mathfrak{sl}_2$ на пространстве $W = V_1^* \otimes V_1 = \mathrm{End}(V_1)$, а также $W^{\otimes 2}$, S^2W и $\Lambda^2 W$.

A5½◇11. Покажите, что $S^n(V_2) = \bigoplus\limits_{i=0}^{[n/2]} V_{2n-4i}$.

A5½◇12. Разложите $S^2(V_3)$ в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей и сопоставьте результат с тем, что

а) пространство квадрик в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V_3)$ распадается в прямую сумму подпространства квадрик, содержащих кубическую кривую Веронезе, и некоторого дополнительного к нему SL_2-инвариантного подпространства (какого?)

б) имеется каноническое SL_2-инвариантное квадратичное отображение Гессе из бинарных кубических форм в квадратичные $\mathrm{Hes} : f(t_0, t_1) \mapsto \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}\right)$.

---

[1] образующие базис алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$

[2] т. е. $a(v \otimes w) \overset{\text{def}}{=} a(v) \otimes w + v \otimes a(w)$, $a(v \cdot w) \overset{\text{def}}{=} a(v) \cdot w + v \cdot a(w)$ и т. п.

[3] действие $\mathfrak{sl}_2$ на V^* определяется по действию на V требованием, чтобы $\langle a\xi, v \rangle + \langle \xi, av \rangle = 0$ для всех $\xi \in V^*$, $v \in V$, $a \in \mathfrak{sl}_2$ ($\langle *, * \rangle$ обозначает свёртку вектора и ковектора)

[4] след берётся в $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$

[5] т. е. такая невырожденная билинейная форма $\beta \in V_n^* \otimes V_n^*$, что $\forall\, v, w \in V_n$ и $\forall\, a \in \mathfrak{sl}_2$ $\beta(av, w) + \beta(v, aw) = 0$

[6] т. е. коммутированием: $a : \varphi \mapsto [a, \varphi]$

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5½ (20 ноября 2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
в			
7а			
б			
8			
9			
10			
11			
12а			
б			