

Представления симметрических групп.

Обозначения. Для стандартного заполнения T диаграммы λ веса n мы обозначаем через $R_T, C_T \subset S_n$ подгруппы, переводящие в себя все строки (соотв. все столбцы) заполнения T , и полагаем $r_T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in R_T} g, c_T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in C_T} \text{sgn}(g) \cdot g, s_T \stackrel{\text{def}}{=} r_T \cdot c_T$. Через V_λ обозначается простой S_n -модуль, изоморфный подмодулю $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ левого регулярного представления, через M^λ — S_n -модуль, изоморфный индуцированному тривиальным 1-мерным представлением R_T , через $C_\mu \subset S_n$ — множество всех перестановок циклового типа μ . Наконец, $z_\mu \stackrel{\text{def}}{=} n! / |C_\mu| = \prod_i m_i! \cdot i^{m_i}$, где $m_i = m_i(\mu)$ это число строк длины i в μ . Основное поле $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

A6½♦1. Приведите в точное соответствие со стандартными представлениями V_λ геометрически заданные неприводимые представления а) S_3 и S_4 б) S_5 .

A6½♦2. Покажите, что представление S_n левыми умножениями а) в идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot r_T$ индуцировано с тривиального представления подгруппы $R_T \subset S_n$ б) в идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot c_T$ индуцировано со знакового представления подгруппы $C_T \subset S_n$.

A6½♦3. Покажите, что идеал $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$, вообще говоря, не содержится в идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot r_T$.

A6½♦4. Установите для $(n - 1)$ -мерного симплициального представления V_Δ группы S_n изоморфизмы а) $\Lambda^k V_\Delta \simeq V_{((n-k), 1^k)}$ б) $V_\Delta^{\otimes 2} \simeq \mathbb{C} \oplus V_\Delta \oplus V_{((n-2), 2)} \oplus V_{((n-2), 1, 1)}$.

A6½♦5. Покажите, что а) $\chi_{((n-2), 1, 1)}(C_\mu) = \binom{m_1 - 1}{2} - m_2$ б) $\chi_{((n-2), 2)}(C_\mu) = \binom{m_1 - 1}{2} + m_2 - 1$

A6½♦6. С какой кратностью входят в индуцированное одномерным представлением максимального цикла умножением на $e^{2\pi i/n}$ а) знаковое б) симплициальное представления?

A6½♦7. Покажите, что значение неприводимого характера χ_λ группы S_n на максимальном цикле равно а) $(-1)^k$ для $\lambda = ((n - k), 1^k)$ б) 0 для всех прочих λ .

A6½♦8. Пусть $\lambda = \lambda^\ell$ состоит из k симметричных крюков с вершинами на главной диагонали и строго убывающих длин $\gamma_i = 2(\lambda_i - i + 1) - 1, 1 \leq i \leq k$. Покажите, что $\chi_\lambda(C_\gamma) = (-1)^{(n-k)/2}$.

A6½♦9. Покажите, что неприводимое представление V_μ группы S_m входит в разложение представления, индуцированного с неприводимого представления V_ν подгруппы $S_n \subset S_m$, если и только если $\mu \supset \nu$, и его кратность равна числу таких заполнений кривой диаграммы $\mu \setminus \nu$ числами от 1 до $m - n$ без повторений, где эти числа строго возрастают по строкам и столбцам.

A6½♦10. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение про ограничения неприводимых представлений.

A6½♦11. Покажите, что V_λ это единственное общее неприводимое слагаемое у M^λ и $M^\lambda \otimes V_{(1^n)}$.

A6½♦12. Покажите, что $[V_\nu] \cdot [V_{(1^n)}] = \bigoplus_\mu V_\mu$, где μ пробегает множество диаграмм, которые можно получить из ν добавлением n клеток так, чтобы никакие 2 не попали в одну строку.

A6½♦13. Покажите, что а) V_λ входит в $V_\mu \otimes V_\nu$ с кратностью $\sum_\eta z_\eta^{-1} \chi_\lambda(C_\eta) \chi_\mu(C_\eta) \chi_\nu(C_\eta)$ причём эта кратность равна б) $\delta_{\mu, \nu}$ для $\lambda = (n)$ в) δ_{μ, ν^c} для $\lambda = (1^n)$.

A6½♦14* (формула Фробениуса). Докажите, что $\dim V_\lambda = n! \cdot \prod_{i < j} (\eta_i - \eta_j) / \prod_k \eta_k!$, где $n = |\lambda|, \eta_i = \lambda_i + \ell - 1$, а ℓ — число строк в диаграмме λ .

A6½♦15* (формула крюков). Докажите, что $\dim V_\lambda = n! / \prod_{a \in \lambda} \Gamma(a)$, где $n = |\lambda|$, а $\Gamma(a)$ -количество клеток в крюке, образованном клеткой $a \in \lambda$, всеми клетками того же столбца снизу от a и всеми клетками той же строки справа от a .

A6½♦16. Докажите, что $\dim V_\lambda < |\lambda|$ только у тривиального, знакового, симплициального и тензорного произведения симплициального и знакового представлений, а также у представления $V_{(2,2)}$ группы S_4 и представлений $V_{(2,2,2)}$ и $V_{(3,3)}$ группы S_6 .

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2а			
б			
3			
4а			
б			
5а			
б			
6а			
б			
7а			
б			
8			
9			
10			
11			
12			
13а			
б			
в			
14			
15			
16			