Категории и функторы.

Обозначения. Через $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{G}rp$, $\mathcal{C}mr$, $\mathcal{M}od_K$, $\mathcal{V}ec_{\Bbbk} = \mathcal{M}od_{\Bbbk}$, $\mathcal{A}ss_{\Bbbk}$, A-$\mathcal{M}od$, $\mathcal{M}od$-A обозначаются категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец[1], модулей над коммутативным кольцом K, векторных пространств и ассоциативных алгебр над полем $\Bbbk$, левых и правых модулей над алгеброй A. $\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{D})$ и $p\mathcal{S}h(\mathcal{C},\mathcal{D})$ суть категории функторов $\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ и предпучков[2] $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}\to\mathcal{D}$.

А7◇1. Категория Δ образована упорядоченными множествами $[n]=\{0,1,\dots,n\}\subset\mathbb{Z}$, $n\geqslant 0$, и неубывающими отображениями $[n]\to[m]$. **а)** Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$ порождается тождественными отображениями $e_n=\mathrm{Id}_{[n]}$, вложениями $\partial_n^{(i)}:[n-1]\hookrightarrow[n]$, $0\leqslant i\leqslant n$, образ не содержит i, и наложениями $s_n^{(i)}:[n]\twoheadrightarrow[n-1]$, $0\leqslant i\leqslant n-1$, $(i+1)\mapsto i$, и **б*)** найдите образующие идеала соотношений между ними.

А7◇2. Покажите, что категория Δ_{big}, образованная *всеми* конечными упорядоченными множествами и неубывающими отображениями между ними эквивалентна своей малой подкатегории Δ.

А7◇3. Для каждого $X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор $h^X:Y\mapsto\mathrm{Hom}(X,Y)$ и предпучок $h_X:Y\mapsto\mathrm{Hom}(Y,X)$ переводят стрелку $\varphi:Y_1\to Y_2$ соответственно в левое и правое умножения на эту стрелку: $\varphi_*:\mathrm{Hom}(X,Y_1)\to\mathrm{Hom}(X,Y_2)$, $\psi\mapsto\varphi\circ\psi$ и $\mathrm{Hom}(Y_2,X)\to\mathrm{Hom}(Y_1,X)$, $\psi\mapsto\psi\circ\varphi$. Проверьте, что сопоставления $X\mapsto h^X$ и $X\mapsto h_X$ задают предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}\to\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)$ и функтор $\mathcal{C}\to p\mathcal{S}h(\mathcal{C},\mathcal{S}et)$.

А7◇4. Покажите, что при применении h^X к точной последовательности $0\to A\to B\to C\to 0$ в $\mathcal{A}b$ получится точная последовательность $0\to\mathrm{Hom}(X,A)\to\mathrm{Hom}(X,B)\to\mathrm{Hom}(X,C)$, правая стрелка в которой не обязательно сюрьективна. Установите двойственный факт про h_X.

А7◇5. Опишите произведения $X\times Y$ и копроизведения $X\otimes Y$ в **а)** $\mathcal{S}et$ **б)** $\mathcal{T}op$ **в)** $\mathcal{M}od_K$ **г)** $\mathcal{G}rp$ **д)** $\mathcal{C}mr$.

А7◇6. Пусть $p\in\mathbb{N}$ — простое и $A_n=\mathbb{Z}/(p^n)$. Для всех $n>m$ обозначим через $\psi_{nm}:\mathbb{Z}/(p^n)\twoheadrightarrow\mathbb{Z}/(p^m)$ факторизацию, а через $\varphi_{mn}:\mathbb{Z}/(p^m)\hookrightarrow\mathbb{Z}/(p^n)$ — вложение $[1]\mapsto[p^{n-m}]$. Покажите, что в $\mathcal{A}b$

а) $\varprojlim A_n$ вдоль стрелок ψ_{mn} изоморфен группе целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_{(p)}$

б) $\varinjlim A_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен подгруппе классов дробей вида z/p^{ℓ} в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

А7◇7. В категории $\mathcal{A}b$ положим $B_n=\mathbb{Z}/(n)$ и при $n|m$ обозначим через $\psi_{nm}:\mathbb{Z}/(m)\twoheadrightarrow\mathbb{Z}/(n)$ факторизацию, а через $\varphi_{mn}:\mathbb{Z}/(n)\hookrightarrow\mathbb{Z}/(m)$ — вложение $[1]\mapsto[m/n]$. Покажите, что

а) $\varprojlim B_n$ вдоль стрелок ψ_{nm} изоморфен неархимедову пополнению $\prod_p\mathbb{Z}_{(p)}$ группы $\mathbb{Z}$

б) $\varinjlim B_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

А7◇8. Для любого чума $\mathcal{N}$ постройте предел и копредел произвольной диаграммы $X:\mathcal{N}\to\mathcal{S}et$.

А7◇9. Докажите, что функтор $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ тогда и только тогда имеет левый сопряжённый F, когда для каждого $X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор $h_G^X:Y\mapsto\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))$ копредставим, и в этом случае $F(X)$ копредставляет h_G^X. Найдите двойственные необходимые и достаточные условия существования правого сопряжённого функтора G к данному функтору $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$.

А7◇10. Постройте левый сопряжённый к функтору забывания алгебраической структуры $\mathcal{C}\to\mathcal{S}et$ для **а)** $\mathcal{C}=\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ **б)** $\mathcal{C}=\mathcal{A}ss_{\Bbbk}$ **в)** $\mathcal{C}=\mathcal{C}mr$ **г)** $\mathcal{C}=\mathcal{G}rp$. В каждом из случаев явно опишите естественное преобразование композиции сопряжённых функторов и тождественный эндофунктор.

А7◇11. Покажите, что все левые сопряжённые функторы перестановочны с копределами, а правые — с пределами[3].

А7◇12. Для любого расширения $S\subset R$ ассоциативных алгебр с единицей постройте левый и правый сопряжённые функторы к функтору ограничения $\mathrm{res}_S^R:R$-$\mathcal{M}od\to S$-$\mathcal{M}od$.

---

[1]с единицей и гомоморфизмами, переводящими единицу в единицу

[2]сиречь контравариантных функторов

[3]функтор $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой диаграммы $\Phi:\mathcal{N}\to\mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом Φ в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F\circ\Phi$ в $\mathcal{D}$

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (4 декабря 2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
д			
6а			
б			
7а			
б			
8			
9			
10а			
б			
в			
г			
11			
12			