

## Расширения коммутативных колец.

В этом листке слово «кольцо» всюду означает коммутативное кольцо с единицей, и все гомоморфизмы колец предполагаются переводящими единицу в единицу.

A8◊1. Пусть поле  $\mathbb{F} \supset \mathbb{Q}$  имеет как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$  размерность  $d < \infty$ . Означает ли целостность над  $\mathbb{Z}$  числа  $\xi \in \mathbb{F}$ , что оператор умножения на  $\xi$  записывается целочисленной матрицей  
 а) в каком-нибудь б) в любом базисе  $\mathbb{F}$  над  $\mathbb{Q}$ ? Покажите, что  
 в) кольцо целых  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$  является свободным  $\mathbb{Z}$ -модулем ранга  $d$   
 г) билинейная форма следа  $\text{Sp} : K \times K \rightarrow \mathbb{Q}$ , сопоставляющая числам  $\alpha, \beta \in K$  след оператора умножения на  $\alpha\beta$ , невырождена

A8◊2. Опишите кольца целых в полях а)  $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$  б)  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$  в)  $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$  г)  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ , где  $d \in \mathbb{Z}$  не делится на квадраты, и д) вычислите дискриминанты<sup>1</sup> этих полей.

A8◊3. Покажите, что любое факториальное<sup>2</sup> кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

A8◊4. Выясните, цело ли а) кольцо  $\mathbb{k}[x, y]$  над подкольцом таких многочленов  $f$ , что  $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(0,0)} f = 0$   
 б) кольцо непрерывных функций  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  над подкольцом таких функций  $f$ , что  $f(1, 0) = f(0, 1)$ .

A8◊5. Для нормального<sup>3</sup> кольца  $A$  с полем частных  $\mathbb{F}$  покажите, что а) произведение двух приведённых многочленов из  $\mathbb{F}[x]$  лежит в  $A[x]$ , если и только если оба множителя лежат в  $A[x]$   
 б) если элемент  $b$  какой-либо  $\mathbb{F}$ -алгебры  $B$  цел над  $A$ , то его минимальный многочлен над  $\mathbb{F}$  лежит в  $A[x]$  в) кольцо  $A[x]$  нормально.

A8◊6. Покажите, что если фактор кольцо  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$  является полем, то оно конечно.

A8◊7. Покажите, что любой гомоморфизм кольца  $A$  в алгебраически замкнутое поле  $\mathbb{k}$  можно продолжить до гомоморфизма  $B \rightarrow \mathbb{k}$  любого целого расширения  $B \supset A$ .

A8◊8. Верно ли, что целое замыкание нётерова нормального кольца  $A$  с полем частных  $K$  в любом конечном сепарабельном расширении<sup>4</sup>  $L \supset K$  конечно порождено как  $A$ -модуль?

A8◊9. Покажите, что всякое поле  $\mathbb{F} \supset \mathbb{C}$ , базис которого как векторного пространства над  $\mathbb{C}$  не более, чем счётен, совпадает с  $\mathbb{C}$ .

A8◊10\*. Выведите из предыдущей задачи, что для любого набора многочленов

$$f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

выполняется альтернатива: либо система уравнений  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  имеет решение в  $\mathbb{C}^n$ , либо существуют такие  $g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , что  $\sum f_i g_i = 1$ .

A8◊11. Покажите, что характер не одномерного неприводимого комплексного представления конечной группы обращается в нуль хотя бы на одном классе сопряжённости.

A8◊12\*. Покажите, что размерность неприводимого комплексного представления конечной группы делит индекс любой её нормальной абелевой подгруппы.

<sup>1</sup>т. е. определитель Грама формы следа в любом базисе кольца целых как модуля над  $\mathbb{Z}$

<sup>2</sup>напомним, что кольцо  $A$  называется факториальным, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент  $a \in A$  является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух разложений  $a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$  в произведение неприводимых множителей  $m = n$  и (после надлежащей перенумерации)  $p_i = s_i q_i$  для некоторых обратимых  $s_i \in A$ ; например, факториальными являются любое поле, любое кольцо главных идеалов (в частности, кольцо целых чисел  $\mathbb{Z}$ ) и кольца многочленов  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  над любым факториальным кольцом  $K$

<sup>3</sup>коммутативное кольцо называется нормальным, если в нём нет делителей нуля и оно целозамкнуто в своём поле частных

<sup>4</sup>т. е. в таком содержащем  $K$  поле  $L$ , что размерность  $L$  как векторного пространства над  $K$  конечна и минимальный многочлен любого элемента  $\vartheta \in L$  над полем  $K$  не имеет кратных корней ни в каком расширении поля  $K$

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
в			
г			
д			
3			
4а			
б			
5а			
б			
в			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			