

Алгебраические многообразия.

A11◊1. Покажите, что изолированные точки слоёв любого регулярного морфизма $\varphi : X \rightarrow Y$ замещают открытое (возможно, пустое) подмножество в X .

A11◊2. Покажите, что правило $(t_0 : t_1 : t_2) \mapsto (t_0^{-1} : t_1^{-1} : t_2^{-1})$ продолжается до рационального отображения $\kappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$, определённого всюду кроме 3 точек. Найдите эти точки, объясните, как действует κ на тройке прямых, соединяющих эти точки, и опишите $\text{im } \kappa$.

A11◊3. Графиком $\Gamma_\psi \subset X \times Y$ рационального отображения $\psi : X \dashrightarrow Y$, определённого на открытом плотном $U \subset X$, называется замыкание множества $\{(x, \psi(x)) \in X \times Y \mid x \in U\}$. Опишите график квадратичного преобразования из зад. A11◊2 и слои его проекций на сомножители.

A11◊4 (результат). Зададимся $(n + 1)$ натуральными степенями d_0, d_1, \dots, d_n , обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}(S^{d_i}V^*)$ пространство гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и положим

$$G = \{(S_0, S_1, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in S_0 \cap S_1 \cap \dots \cap S_n\}.$$

Покажите что а) G — неприводимое проективное многообразие и найдите $\dim G$ б) существует единственный с точностью до пропорциональности неприводимый полином R от коэффициентов однородных форм F_0, F_1, \dots, F_n заданных степеней от $(n + 1)$ переменных, обращающийся в нуль, если и только если система $(n + 1)$ уравнений $F_i = 0$ имеет ненулевое решение¹.

A11◊5. Покажите, что размерность неприводимого многообразия $X \subset \mathbb{P}_n$ равна: а) наибольшему $d \in \mathbb{Z}$, такому что $X \cap L \neq \emptyset$ для любого $(n - d)$ -мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$ б) наименьшему $d \in \mathbb{Z}$, при котором имеется $(n - d - 1)$ -мерное проективное подпространство $L \subset \mathbb{P}_n$ с $X \cap L = \emptyset$ в) наименьшему $d \in \mathbb{Z}$, такому что $X \cap L = \emptyset$ для общего² $(n - d - 1)$ -мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$.

A11◊6. Покажите, что множество $(n - d)$ -мерных проективных подпространств $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающих произвольно заданное d -мерное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ по конечному множеству точек, является плотным открытым по Зарисскому подмножеством грассманиана³ $\text{Gr}(n + 1 - d, V)$, параметризующего все $(n - d)$ -мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$.

A11◊7. Обозначим через $\mathcal{D}_k(m, n) \subset \mathbb{P}(\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k}))$ проективное многообразие $m \times n$ -матриц ранга $\leq k$. С помощью подходящего многообразия инцидентности $\Gamma = \{(L, M) \mid L \subset \ker M\}$, где L — подпространство, а M — матрица, покажите, что $\mathcal{D}_k(m, n)$ является неприводимым проективным многообразием и найдите $\dim \mathcal{D}_k(m, n)$.

A11◊8. Покажите, что в \mathbb{P}_3 а) на каждой кубической поверхности лежит прямая б) кубические поверхности с конечным числом лежащих на них прямых содержат плотное открытое подмножество пространства всех кубических поверхностей в) множество поверхностей 4-й степени, на которых есть хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве всех поверхностей 4-й степени.

A11◊9. Покажите, что множество n -мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой $(2n + 1)$ -мерной квадрике в \mathbb{P}_{2n+2} (соотв. на гладкой $2n$ -мерной квадрике в \mathbb{P}_{2n+1}) является неприводимым проективным многообразием (соотв. дизъюнктивным объединением двух изоморфных друг другу проективных многообразий) и выясните размерности этих многообразий.

A11◊10 (многообразие секущих). Для неприводимого $X \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим через $\mathcal{S}(X) \subset \text{Gr}(2, V)$ замыкание множества всех прямых (p, q) с $p, q \in X$ и $p \neq q$, а через $S(X) \subset \mathbb{P}(V)$ — объединение в $\mathbb{P}(V)$ всех прямых ℓ из $\mathcal{S}(X)$. Покажите, что а) $\mathcal{S}(X)$ неприводимо и $\dim \mathcal{S}(X) = 2 \dim X$ б) $S(X)$ неприводимо и $\dim S(X) \leq 2 \dim X + 1$ в) если X — скрученная⁴ кривая, то $\dim S(X) = 3$

¹кстати, как выглядит этот многочлен, когда все степени равны единице?

²т. е. лежащего в некотором открытом по Зарисскому плотном подмножество грассманиана $\text{Gr}(n - d, V)$, параметризующего все $(n - d - 1)$ -мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$

³ $(L, p - \Gamma + u) \cap \Gamma \leftarrow L$ инцидентность, значит, проекция эллиптической кривой на проективную плоскость — эллиптическая кривая $X \leftarrow L$ инцидентность $\{H \ni x \mid (L, p - \Gamma + u) \cap \Gamma \times X \ni (H, x)\} = L$ — эллиптическая кривая

⁴т. е. не содержащаяся в плоскости

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4а			
б			
5а			
б			
в			
6			
7			
8а			
б			
в			
9			
10а			
б			
в			