

**Примерная программа курса «Алгебра – 4»
(второй семестр алгебры для 2-го курса НМУ)**

- Тема 1.** Целые элементы образуют кольцо, целые расширения транзитивны, если в целом расширении целостных колец одно из колец является полем, то и другое поле. Лемма Гаусса: если в $B[x]$ выполнено равенство $fg = h$ и старшие коэффициенты f, g равны единице, то все коэффициенты h целы над $A \subset B$ тогда и только тогда, когда целы все коэффициенты и у f и у g . Целость характеров конечной группы, размерность неприводимого представления делит индекс любой абелевой нормальной подгруппы
- Тема 2.** Алгебраические расширения полей. Прimitивные расширения, примитивные элементы, поле разложения, алгебраическое замыкание. Продолжение гомоморфизмов на расширения, нормальность, сепарабельность. Группы автоморфизмов полей и поля инвариантов, расширения Галуа, соответствие Галуа. Техника вычисления групп Галуа. Группы Галуа круговых и конечных полей, элементы Фробениуса. Циклические и разрешимые расширения, разрешимость уравнений в радикалах.
- Тема 3.** Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе полиномиального идеала, нётеровость конечно порождённых алгебр над полем. Конечно порождённая алгебра над произвольным полем \mathbb{k} может быть полем только если все её элементы алгебраичны над \mathbb{k} . Системы полиномиальных уравнений и полиномиальные идеалы, теорема Гильберта о нулях, теория исключения, системы результатов. Базисы трансцендентности и трансцендентная размерность конечно порождённой целостной алгебры над полем.
- Тема 4.** Аффинная алгебраическая геометрия. Эквивалентность категории конечно порождённых коммутативных алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем и категории аффинных алгебраических многообразий: максимальные спектры, топология Зарисского, регулярные морфизмы. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр: замкнутые вложения, доминантные морфизмы, замкнутость конечных морфизмов и открытость конечных морфизмов в нормальное многообразие. Касательное пространство и касательный конус к алгебраическому многообразию в точке.
- Тема 5 (насколько останется времени).** Комплексы ($\mathbb{k}[\varepsilon]/\varepsilon^2$ -модули), их тензорные произведения, гомоморфизмы, гомотопии и гомологии. Связывающий гомоморфизм и стандартные точные последовательности. Примеры комплексов: симплициальный комплекс симплициального множества, комплексы Кошуля, бар-конструкция. Фильтрованные комплексы, бикомплексы, точные пары и спектральные последовательности. Гомотопическая категория комплексов, выделенные треугольники.